

Corso di Dottorato. a.a. 09/10.

Operatori ellittici e topologia

Docente: Paolo Piazza

Lo scopo di questo corso è quello di illustrare alcuni fra i numerosissimi collegamenti che esistono fra gli operatori ellittici su una varietà compatta e le proprietà topologiche e geometrico-differenziali della varietà stessa. Verranno presi in esame principalmente operatori di tipo Dirac e loro quadrati (anche detti operatori di Laplace generalizzati).

Uno degli obiettivi principali del corso è quello di dare una dimostrazione completa della **formula dell'indice di Atiyah-Singer** per operatori ellittici su varietà compatte e senza bordo. La nostra analisi ci porterà a parlare anche del **teorema di Hodge**, del **teorema di Gauss-Bonnet-Chern**, del **teorema di Riemann-Roch-Hirzebruch**, del **teorema della segnatura** di Hirzebruch e di metriche a curvatura scalare positiva su varietà spin. Parleremo anche di altri invarianti analitici e dei loro collegamenti con invarianti topologici (**invariante rho**, **torsione analitica**).

Prerequisiti. Nozione di varietà differenziabile, spazio tangente, campo di vettori, forma differenziale, qualche rudimento di topologia algebrica (gruppo fondamentale; coomologia di de Rham). Nozioni di base di analisi funzionale.

A chi interessa questo corso. Studenti e ricercatori in analisi e/o geometria e/o fisica teorica. In ogni caso: il teorema dell'indice di Atiyah-Singer è ormai annoverato da molti come uno dei risultati centrali della Matematica degli ultimi 50 anni e come tale potrebbe essere considerato di interesse generale.

Programma:

Fibrati vettoriali: connessioni, curvatura, teoria di Chern-Weil, classi caratteristiche.

Operatori di Dirac: algebre di Clifford, operatori di Dirac generalizzati, laplaciani generalizzati.

Esempi: operatore di Gauss-Bonnet, operatore della segnatura, varietà spin, fibrato degli spinori, operatore di Dirac di una varietà spin. Varietà spin_c .

Equazione del calore: nucleo del calore per un laplaciano generalizzato, esistenza e unicità. Traccia. Sviluppo asintotico per t piccolo. Oscillatore armonico. Formula di Mehler.

Indice di un operatore di Dirac: definizione, proprietà di stabilità, formula di McKean-Singer, esempi notevoli.

Teorema dell'indice di Atiyah-Singer: dimostrazione tramite il riscaldamento di Getzler. Formula generale di Atiyah-Singer (cenni).

Applicazioni notevoli: teorema di Chern-Gauss-Bonnet, di Riemann-Roch-Hirzebruch, della segnatura di Hirzebruch. Ostruzioni all'esistenza di metriche a curvatura positiva.

Altri invarianti (cenni): Invarianti eta. Invarianti rho. Teorema dell'indice di Atiyah-Patodi-Singer su varietà con bordo. Teorema della segnatura. Problemi di unicità per metriche a curvatura scalare positiva su una varietà chiusa. Determinanti. Torsione analitica e torsione di Reidemester. Teorema di Cheeger-Mueller.