

**Corso di Dottorato. a.a. 05/06.**

**Operatori ellittici e topologia**

**Docente: Paolo Piazza**

Lo scopo di questo corso è quello di illustrare alcuni fra i numerosissimi collegamenti che esistono fra gli operatori ellittici su una varietà compatta e le proprietà topologiche e geometrico-differenziali della varietà stessa. Verranno presi in esame principalmente operatori di tipo Dirac e loro quadrati (anche detti operatori di Laplace generalizzati).

Uno degli obiettivi principali del corso è quello di dare una dimostrazione completa della **formula dell'indice di Atiyah-Singer** per operatori ellittici su varietà compatte e senza bordo. La nostra analisi ci porterà a parlare anche del **teorema di Hodge**, del **teorema di Gauss-Bonnet-Chern**, del **teorema di Riemann-Roch-Hirzebruch**, del **teorema della segnatura** di Hirzebruch e di metriche a curvatura scalare positiva su varietà spin. Parleremo anche di altri invarianti analitici e dei loro collegamenti con invarianti topologici (**invariante rho, torsione analitica**).

Il corso si divide in **due parti** ben distinte. La prima avrà un'impostazione istituzionale, con teoremi, dimostrazioni, esercizi, compiti a casa ed esame finale. La seconda, di circa 8 ore, sarà invece molto più informale: almeno nelle intenzioni, questa seconda parte vuole essere un'introduzione ad alcuni sviluppi della teoria di Atiyah-Singer, molti dei quali costituiscono, ancora oggi, attivi campi di ricerca.

**Prerequisiti.** Nozione di varietà differenziabile, spazio tangente, campo di vettori, forma differenziale, qualche rudimento di topologia algebrica (gruppo fondamentale; coomologia di de Rham). Nozioni di base di analisi funzionale.

**A chi interessa questo corso.** Studenti e ricercatori in analisi e/o geometria e/o fisica teorica.

**Programma della prima parte:**

**Fibrati vettoriali:** connessioni, curvatura, teoria di Chern-Weil, classi caratteristiche.

**Operatori di Dirac:** algebre di Clifford, operatori di Dirac generalizzati, laplaciani generalizzati.

**Esempi:** operatore di Gauss-Bonnet, operatore della segnatura, varietà spin,

fibrato degli spinori, operatore di Dirac di una varietà spin. Varietà  $\text{spin}_c$ .

**Equazione del calore:** nucleo del calore per un laplaciano generalizzato, esistenza e unicità. Traccia. Sviluppo asintotico per  $t$  piccolo. Oscillatore armonico. Formula di Mehler.

**Indice di un operatore di Dirac:** definizione, proprietà di stabilità, formula di McKean-Singer, esempi notevoli.

**Teorema dell'indice di Atiyah-Singer:** dimostrazione tramite il riscaldamento di Getzler. Formula generale di Atiyah-Singer (cenni).

**Applicazioni notevoli:** teorema di Chern-Gauss-Bonnet, di Riemann-Roch-Hirzebruch, della segnatura di Hirzebruch. Ostruzioni all'esistenza di metriche a curvatura positiva.

**Altri invarianti (cenni):** Invarianti eta. Invarianti rho. Teorema dell'indice di Atiyah-Patodi-Singer su varietà con bordo.. Teorema della segnatura. Varietà modulari di Hilbert e funzione  $L$ . Problemi di unicità per metriche a curvatura scalare positiva su una varietà chiusa. Determinanti. Torsione analitica e torsione di Reidemester. Teorema di Cheeger-Mueller.

### **Argomenti della seconda parte:**

Il tema è il seguente: **Operatori ellittici, algebre di operatori e geometria noncommutativa.**

**Il teorema dell'indice per famiglie di operatori (alla Bismut):** K-teoria, classe indice, superconnessioni, nucleo del calore associato, carattere di Chern della classe indice, superconnessione di Bismut, formula dell'indice. Fibrati determinanti.

**Operatori ellittici su rivestimenti:** il teorema di Atiyah sui rivestimenti di Galois, K-teoria di un'algebra  $C^*$ , classe di Mishchenko-Fomenko, K-omologia, mappa di Baum-Connes, coomologia ciclica, teorema dell'indice superiore di Connes-Moscovici (alla Lott). Applicazioni geometriche: segnature superiori di Novikov, congettura di Novikov, stato della congettura, ostruzioni all'esistenza di metriche a curvatura scalare positiva. Congettura di Baum-Connes. Alcune sue conseguenze.

**Operatori ellittici su foliazioni:** Teorema dell'indice di Connes sulle foliazioni. Teorema dell'indice superiore su foliazioni. Invariante di Godbillon-Vey di una foliazione.