Corso di dottorato. "Il teorema dell'indice di Atiyah-Singer". Compito a casa del 19/12/00

Ricordiamo le notazioni introdotte a lezione. $\mathrm{Cl}(k)$ è l'algebra di Clifford associata allo spazio vettoriale $\mathbb{R}^k$ dotato del prodotto scalare canonico. $\mathrm{Cl}(k) = \mathrm{Cl}_0(k) \oplus \mathrm{Cl}_1(k)$, con $\mathrm{Cl}_0(k)$ ($\mathrm{Cl}_1(k)$) la sottoalgebra generata dagli elementi che sono il prodotto di un numero pari (dispari) di elementi di $\mathbb{R}^k$. $\mathbb{Cl}(k)$ è la complessificazione di $\mathrm{Cl}(k)$. Una base ortonormale di $\mathbb{R}^k$ è denotata con $\{\underline{e}_1, \ldots, \underline{e}_k\}$.

Esercizio 1. Sia $\mathbb{H}$ l'algebra dei quaternioni. Verificare che si hanno i seguenti isomorfismi di algebre:

$$\mathrm{Cl}(1) \simeq \mathbb{C}, \quad \mathrm{Cl}(2) \simeq \mathbb{H}, \quad \mathrm{Cl}_0(2) \simeq \mathbb{C} \subset \mathbb{H}$$

Esercizio 2. Verificare che $\mathrm{Cl}(3) \simeq \mathbb{H} \oplus \mathbb{H}$. Suggerimento: poniamo

$$x = \underline{e}_1,\ y = \underline{e}_2,\ z = \underline{e}_3$$

Verificare che l'unione delle seguenti 2 quadruple fornisce una base di $\mathrm{Cl}(3)$:

$$\frac{1+xyz}{2}, \quad \frac{xy-z}{2}, \quad \frac{yz-x}{2}, \quad \frac{zx-y}{2};$$

$$\frac{1-xyz}{2}, \quad \frac{xy+z}{2}, \quad \frac{yz+x}{2}, \quad \frac{zx+y}{2}.$$

Utilizzare questa base per definire l'isomorfismo. Verificare che $\mathrm{Cl}_0(3)$ corrisponde ad una copia diagonale di $\mathbb{H}$ in $\mathbb{H} \oplus \mathbb{H}$. Dimostrare che $\mathrm{Cl}_0(4) \simeq \mathbb{H} \oplus \mathbb{H}$.

Esercizio 3. Determinare $\mathrm{Pin}(1) \subset \mathrm{Cl}(1) \simeq \mathbb{C}$. Determinare $\mathrm{Spin}(1)$. Dimostrare che $\mathrm{Spin}(2) = \{\cos\theta + (\sin\theta)\underline{e}_1 \cdot \underline{e}_2\}$ e che quindi $\mathrm{Spin}(2) \simeq S^1 = SO(2)$. Verificare che con questa identificazione il rivestimento $\rho : \mathrm{Spin}(1) \to SO(2)$ descritto a lezione è dato da $\theta \to 2\theta$. Avrete bisogno di un pò di trigonometria.

Esercizio 4. Verificare che $\mathrm{Spin}(3)$ è isomorfo alla sfera unitaria S^3 in $\mathbb{H}$. Suggerimento: utilizzare l'identificazione $\mathrm{Cl}(3) \leftrightarrow \mathbb{H} \oplus \mathbb{H}$ dell'Esercizio 2. Verificare che c'è un isomorfismo di algebre

$$\mathbb{H} \simeq V := \{Q = \begin{pmatrix} t+iz & -x+iy \\ x+iy & t-iz \end{pmatrix}, (t,x,y,z) \in \mathbb{R}^4\}.$$

Dedurne che $\mathrm{Spin}(3) = SU(2)$.

Esercizio 5. Sia V come nell'Esercizio 4, $V \simeq \mathbb{R}^4$. Possiamo introdurre una struttura naturale di spazio vettoriale euclideo su V e riguardarlo come $\mathbb{R}^4$ con il prodotto scalare canonico. Denotiamo con S^+, S^- due copie di $\mathbb{C}^2$ con il prodotto hermitiano standard. Sia $Q \in V$ e consideriamo l'applicazione

$$Q \longrightarrow \begin{pmatrix} 0 & -\overline{Q}^t \\ Q & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{End}(S^+ \oplus S^-) \tag{1}$$

implicitamente a destra stiamo considerando $Q \in \mathrm{Hom}(S^+, S^-)$. Verificare che quest'applicazione induce un isomorfismo di algebre

$$\mathbb{C}l(4) \longleftrightarrow \mathrm{End}(S^+ \oplus S^-)$$

Dimostrare anche che $\mathrm{Spin}(4) \simeq SU(2) \times SU(2)$.
Un metodo alternativo per dimostrare che $\mathrm{Spin}(4) \simeq SU(2) \times SU(2)$ è ovviamente quello di far vedere che $SU(2) \times SU(2)/\{\pm 1\} \simeq SO(4)$. Si noti che il primo metodo ci dà in più le 2 mezze-rappresentazioni spin di $\mathrm{Spin}(4)$.
Esercizio 6. Sia $M = \mathbb{R}^4$, che è in maniera naturale una varietà spin di dimensione pari. Scrivere esplicitamente l'operatore di Atiyah-Singer associato all'unica struttura spin di M.
Esercizio 7. Sia E un modulo di Clifford per lo spazio vettoriale euclideo $\mathbb{R}^k$. Rimane definito un operatore di Dirac $D\!\!\!/ : \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^k, E) \to \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^k, E)$. Calcolare $D\!\!\!/^2$.
Esercizio 8. Sia (V, q) uno spazio vettoriale reale euclideo orientato di dimensione $2k$. Abbiamo costruito la rappresentazione spin di $\mathrm{Spin}(V)$ utilizzando l'unica rappresentazione irriducibile di $\mathbb{C}l(V)$ (che viene a sua volta dall'isomorfismo $\mathbb{C}l(V) \simeq M_{\mathbb{C}}(2^k)$). Possiamo costruire esplicitamente questa rappresentazione a partire da V come segue.
8.1 Dimostrare che V ammette sempre una stuttura complessa e cioè un operatore $J \in \mathrm{End}(V)$ tale che $J^2 = -1$.
8.2 Dimostrare che J può essere scelto compatibile con il prodotto scalare di V: $q(Jv, Jv') = q(v, v')$.
8.3 Possiamo estendere J e q a $V \otimes \mathbb{C}$; otteniamo una decomposizione $V \otimes \mathbb{C} = V^{(1,0)} \oplus V^{(0,1)}$ con $V^{(1,0)} = \{v \in V \otimes \mathbb{C} : J_{\mathbb{C}}(v) = iv\}$ e analogamente per $V^{(0,1)}$. Verificare che questi due sottospazi sono una coppia di sottospazi trasversi isotropi di dimensione massima. (Un sottospazio P è isotropo se $q_{\mathbb{C}}(p_1, p_2) = 0 \ \forall p_1, p_2 \in P$.) Verificare che tramite $q_{\mathbb{C}}$ possiamo identificare $V^{(0,1)}$ con $(V^{(1,0)})^*$.
Definiamo $S = \Lambda V^{1,0}$. Se $v \in V$ allora $v = v^{(1,0)} + v^{(0,1)}$. Definiamo un'azione di v su S come segue

$$c(v)s = \sqrt{2}\epsilon(v^{(1,0)})s - \sqrt{2}\mathrm{int}(v^{(0,1)})s$$

dove $\mathrm{int}(v^{(0,1)})$ è la moltipliazione interna per $v^{(0,1)} \in V^{(0,1)} = (V^{(1,0)})^*$. Verificare che quest'azione si estende ad una rappresentazione

$$\mathbb{C}l(V) \to \mathrm{End}(S).$$

Spiegare perché questa è *la* rappresentazione irriducibile di $\mathbb{C}l(V)$.
Si può verificare, ma non vi chiedo di farlo, che J può essere scelta in modo tale che la $\mathbb{Z}_2$-graduazione naturale di S (forme pari/dispari) coincide con quella data dall'operatore di chiralità. Quindi l'azione introdotta è $\mathbb{Z}_2$-graduata. Ne segue che quando restringiamo questa rappresentazione a $\mathrm{Spin}(V) \subset \mathrm{Cl}_0(V)$ otteniamo le due mezze-rappresentazioni spin di $\mathrm{Spin}(V)$:

$$S^+ = \Lambda^{\mathrm{pari}} V^{(1,0)}, \qquad S^- = \Lambda^{\mathrm{disp}} V^{(1,0)}$$