Corso di dottorato. "Il teorema dell'indice di Atiyah-Singer".
Compito a casa del 5/12/00

Esercizio 1. Abbiamo visto in classe che

$$\int_{\mathbb{C}P^1} c_1(T^{1,0}\mathbb{C}P^1) = 2 \tag{1}$$

come applicazione del teorema di Gauss-Bonnet in dimensione 2. Verificare (1) direttamente, considerando la metrica hermitiana h definita dalla formula $h(z) = 1/((1+|z|^2))^2$ nella carta $U = \{[z_0, z_1] \mid z_0 \neq 0\}$ con coordinata $z = z_1/z_0$. Dedurne che

$$\int_{\mathbb{C}P^1} e(T\mathbb{C}P^1) = 2 \tag{2}$$

Esercizio 2. Consideriamo $S^2 \subset \mathbb{R}^3$ con la metrica indotta. Sia ∇ la connessione di Levi-Civita, o, il che è lo stesso, la connessione ottenuta per proiezione dall' usuale differenziale in $\mathbb{R}^3$. Verificare direttamente che

$$e(TS^2, \nabla) = \frac{1}{2\pi}\,\mathrm{dvol}\,.$$

Dedurne (2)

Esercizio 3. Sia L il fibrato tautologico su $\mathbb{C}P^1$. Abbiamo visto in classe che

$$\int_{\mathbb{C}P^1} c_1(L) = -1$$

3.1 Dimostrare che sussiste il seguente isomorfismo: $T^{1,0}\mathbb{C}P^1 = L^* \otimes L^*$. (Suggerimento: considerare le funzioni di transizion2.)
3.2 Dimostrare (1) utilizzando questo isomorfismo.

Esercizio 4.

- Sia $M = S^2 \times \cdots \times S^2$ (n-prodotti). Calcolare $\int_M e(M)$.
- Calcolare $p(TS^n)$.
- Sia M una superficie di Riemann di genere 1. Verificare che $Td(M) = 0$.

Esercizio 5. Sia k un numero naturale. Una partizione di k è una successione non ordinata di numeri naturali $i_1, \ldots, i_r$ tali che $i_1 + \cdots + i_r = k$. Sia M una varietà compatta e sia $\mathbf{I}$ una partizione di k. L' $\mathbf{I}$-mo *numero di Pontrjagin* di M è per definizione

$$p_{\mathbf{I}}(M) := \int_M p_{i_1}(TM) \wedge p_{i_2}(TM) \wedge \cdots \wedge p_{i_r}(TM)$$

Supponiamo che M sia un bordo: $M = \partial W$ per qualche varietà differenziabile con bordo W. Dimostrare che tutti i numeri di Pontrjagin sono nulli. (Suggerimento: utilizzare la normale al bordo per verificare che $TW|_M \simeq TM \oplus \mathbf{1}$).

Esercizio 6. Sia L il fibrato tautologico su $\mathbb{C}P^n$ (un fibrato *olomorfo*) ; L eredita una metrica hermitiana h dalla metrica canonica di $\mathbb{C}P^n \times \mathbb{C}^{n+1}$. (Abbiamo visto questa metrica nel caso $n = 1$.)
6.1 Calcolare $c_1(L, \nabla)$, con ∇ la connessione complessa compatibile con la metrica.
6.2 (Presuppone un pó di coomologia singolare). Verificare che $c_1(L) \neq 0$ in $H^2(\mathbb{C}P^1)$ verificando che il suo integrale su un generatore di $H_2(\mathbb{C}P^1)$ non è zero. Vi "ricordo" che $H^{2*}(\mathbb{C}P^n) = \mathbb{C}$ e che $H^{2*+1}(\mathbb{C}P^n) = 0$. (Suggerimento: si può prendere come generatore di $H_2(\mathbb{C}P^1)$ la classe $[c]$, con $c = \{[z_0, z_1, \ldots, z_n] \,|\, z_j = 0 \,\forall j > 1\}$. Verificare che $\int_c c_1(L) = -1$ (è un calcolo che abbiamo essenzialmente già fatto...).

Esercizio 7. Calcolare la classe di Chern $c(T^{1,0}\mathbb{C}P^n)$ in funzione di $x = -c_1(L) \in H^2(\mathbb{C}P^n)$. Stesso esercizio per la classe di Pontriagin $p(T\mathbb{C}P^n)$. Suggerimento: abbiamo visto nell'Esercizio 4 del compito del 17/11/00 che esiste un isomorfismo di fibrati complessi:

$$T^{1,0}\mathbb{C}P^n \oplus \mathbf{1} \simeq L^* \oplus \cdots \oplus L^* \;\; \text{(n+1) volte} \;.$$

Abbiamo anche enunciato a lezione le seguenti proprietà per uno fibrato vettoriale complesso E e per il soggiacente fibrato vettoriale reale $E_{\mathbb{R}}$:

$$E_R \otimes \mathbb{C} \simeq E \oplus \overline{E}\,, \quad \overline{E} \simeq E^*$$

Ulteriori proprietà degli spazi proiettivi complessi

Sia M una varietà complessa di dimensione complessa n. Abbiamo visto come ci sia una decomposizione $TM \otimes \mathbb{C} = T^{1,0}M \oplus T^{0,1}M$ e come $T^{1,0}M$ sia isomorfo a TM in quanto spazio vettoriale reale. Una metrica hermitiana su M è una metrica hermitiana sul fibrato tangente olomorfo $T^{1,0}M$. In una carta locale $U, (z^1, \ldots, z^n)$ possiamo scrivere $h = h_{ij} dz^i \otimes d\overline{z}^j$ con $h_{ij} : U \to M_{n \times n}(\mathbb{C})$ hermitiana. La parte reale di h definisce una metrica riemanniana su $T^{1,0}M$, cioè su TM. Analogamente la parte immaginaria di h definisce una forma alternante su TM, quindi una 2-forma. La 2-forma

$$\omega = -\frac{1}{2}\mathrm{Im} h$$

è detta forma di Kähler associata ad h. Localmente $\omega = \frac{i}{2} h_{k\ell} dz^k \wedge d\overline{z}^\ell$; ω è quindi una $(1,1)$-forma reale e, inoltre, è definita positiva: $\omega(v,v) > 0$, $v \neq 0$. Viceversa una $(1,1)$-forma di questo tipo definisce una metrica hermitiana (si pone $h(v,w) := 2[\omega(w, iv) + i\omega(w,v)]$); il prodotto esterno di ω con se stessa è una forma di volume. In particolare

$$\int_M \omega \wedge \cdots \wedge \omega \neq 0\,.$$

Una varietà complessa è detta di Kähler se ammette una metrica hermitiana la cui forma di Kähler è *chiusa*. Si noti che una tale forma non è mai esatta (applicare il teorema di Stokes per arrivare all'assurdo che $\int \omega \wedge \cdots \wedge \omega = 0$).

Sia $M = \mathbb{C}P^n$ e sia $\pi : \mathbb{C}^{n+1} - \underline{0} \to \mathbb{C}P^n$ la proiezione canonica. Sia U un intorno aperto e sia $Z : U \to \mathbb{C}^{n+1} - \underline{0}$ un'applicazione olomorfa tale che $\pi \circ Z = \mathrm{Id}$. Ad esempio, se $U \equiv U_j = \{[z_0, \dots, z_n] \,|\, z_j \neq 0\}$ allora possiamo scegliere $Z = s^j$

$$s^j([z_0, \dots, z_n]) = \frac{z_o}{z_j} + \cdots + 1 + \cdots + \frac{z_n}{z_j} \tag{3}$$

(abbiamo già incontrato queste sezioni locali). Definiamo una (1,1)-forma su U come segue:

$$\omega_U = \frac{i}{2\pi} \partial\overline{\partial} \log ||Z||^2 \,.$$

Si verifica senza difficoltà che ω non dipende dalla particolare scelta di sezione locale olomorfa $Z : U \to \mathbb{C}^{n+1} - \underline{0}$. ω; rimane quindi definita una forma ω su tutta la varietà. Se, ad esempio, $U = U_0$ con coordinate $(\zeta_1, \dots, \zeta_n)$, la forma ω può essere scritta come segue prendendo $Z = s^0$:

$$\omega = \frac{1}{2\pi} \left[\frac{\sum d\zeta_j \wedge d\overline{\zeta}_j}{1 + \sum \zeta_j \overline{\zeta}_j} - \frac{(\sum \overline{\zeta}_j d\zeta_j) \wedge (\sum \zeta_j d\overline{\zeta}_j)}{(1 + \sum \zeta_j \overline{\zeta}_j)^2} \right]$$

Si noti che ω è reale e che è certamente definita positiva nel punto $[1, 0, \dots, 0] \in U_0$. Per $U(n+1)$-invarianza è definita positiva ovunque. ω definisce quindi una metrica, *la metrica di Fubini-Study*. Scriveremo anche ω_{FS}. Si noti che ω è chiusa perché localmente risulta $\omega = i/4\pi(d(\partial - \overline{\partial}) \log ||Z||^2)$. Ne segue che $\mathbb{C}P^n$ è una varietà di Kähler.

Sia ora L il fibrato tautologico. L eredita una matrica hermitiana h dalla metrica banale in $\mathbb{C}P^n \times \mathbb{C}^{n+1}$. Lo abbiamo visto a lezione nel caso $n = 1$. Sia ∇ la connessione complessa compatibile con tale metrica. Scrivendo l'espressione locale di h e quella di $c_1(L, \nabla)$ in funzione di una base locale olomorfa ci accorgiamo (questo è di fatto l'Esercizio 6) che

$$c_1(L, \nabla) = -\omega_{\mathrm{FS}} \,.$$

Da quanto detto ne segue che $c_1(L)$ non è zero in $H^2(\mathbb{C}P^1)$. Inoltre

$$\int_{\mathbb{C}P^n} (-c_1(L))^n \neq 0.$$

Di fatto si può calcolare esplicitamente quest'integrale e si ottiene

$$\int_{\mathbb{C}P^n} (-c_1(L))^n = 1.$$

Utilizzando quest'informazione ed un pó di variabile complessa si dimostra senza difficoltà che

$$Td(\mathbb{C}P^n) := \int_{\mathbb{C}P^n} Td(T^{1,0}\mathbb{C}P^n) = 1 \,, \qquad L(\mathbb{C}P^{2n}) := \int_{\mathbb{C}P^{2n}} L(T\mathbb{C}P^{2n}) = 1$$