Corso di dottorato. ''Il teorema dell'indice di Atiyah-Singer''.
Compito a casa del 24/11/00

Esercizio 0. Sia (M, g) una varietà riemanniana. Sia $f : M \to M$ un diffeomorfismo e supponiamo che f sia un' *isometria*. Dato che f è un diffeomorfismo, il differenziale di f induce un'applicazione $f_* : \mathcal{C}^\infty(M, TM) \to \mathcal{C}^\infty(M, TM)$ definita come segue: se W è un campo di vettori su M allora $(f_*W)(p) := df|_q(W_q)$ con $f(q) = p$.
Dimostrare, utilizzando le definizione stessa di connessione di Levi-Civita, che

$$\nabla_{f_*X} f_*Y = f_*(\nabla_X Y)\,.$$

Dedurne che f manda geodetiche in geodetiche.

Esercizio 1. Consideriamo S^2 con la metrica indotta da $\mathbb{R}^3$.
1.1 Scrivere l'equazione delle geodetiche nella carta definita dalle coordinate sferiche. Determinare almeno una soluzione.
1.2 Verificare che l'azione naturale di $SO(3)$ su S^2 trasforma geodetiche in geodetiche.
1.3 Verificare che le circonferenze di raggio massimo di S^2 sono geodetiche.

Esercizio 2. Sia M una varietà differenziabile. Consideriamo $[0,1] \times M$ e le inclusioni naturali $i_0 : M \to [0,1] \times M$, $i_0(p) = (0,p)$ e $i_1 : M \to [0,1] \times M$, $i_1(p) = (1,p)$. Sia F un fibrato su $[0,1] \times M$. Possiamo sempre dotare F di una connessione
2.1 Verificare che esiste un isomorfismo di fibrati $i_0^*F \simeq i_1^*F$. (Suggerimento: utilizzare il trasporto parallelo.)
2.2 Dedurre che se (E, π, M) è un fibrato e $f : N \to M$ e $g : N \to M$ sono due applicazioni $\mathcal{C}^\infty$-omotope allora $f^*E \simeq g^*E$.
2.3 Dedurre che ogni fibrato E su una varietà contraibile è banale.

Esercizio 3. (Richiede un minimo di conoscenze sui gruppi di Lie). Sia $G = SO(n)$. Diamo per buona l'esistenza di una metrica riemanniana bi-invariante su G. Fissiamo una tale metrica $<\,,\,>$ e sia ∇ la connessione di Levi-Civita associata.
3.1 Verificare che se X ed Y sono campi vettoriali invarianti a sinistra allora

$$\nabla_X Y = \frac{1}{2}[X, Y]$$

Suggerimento: verificare preliminarmente l'identità

$$< [Z, X], Y > + < X, [Y, Z] >= 0$$

per 3 campi di vettori invarianti a sinistra.
3.2 Determinare le geodetiche passanti per l'identità .

Esercizio 4. Consideriamo la sfera S^2 con la metrica indotta. Consideriamo i punti

$$P = (1,0,0)\,, \quad Q = (0,1,0)\,, \quad R = (0,0,1)$$

Sia γ_{PQ} la porzione di equatore congiungente P e Q. Siano γ_{PR} e γ_{QR} le porzioni di meridiani congiungenti P ed R, e Q ed R.
4.1 Parametrizzare queste 3 curve (banale).
4.2 Sia $\underline{v} = (0, \alpha, \beta) \in T_{(1,0,0)}S^2$. Sia ∇ la connessione di Levi-Civita. Trasportiamo per parallelismo $\underline{v}$ lungo queste 3 curve nell'ordine $\gamma_{PQ} \to \gamma_{QR} \to \gamma_{RP}$ (notare che la composizione delle tre curve è un laccio puntato in P). Calcolare il vettore $\underline{w} \in T_{(1,0,0)}S^2$ ottenuto alla fine di questi 3 trasporti paralleli.

Esercizio 5. (Per i volenterosi.) Consideriamo le matrici

$$e_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad e_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix} \tag{1}$$

Queste tre matrici godono della seguente proprietà

$$e_i e_j + e_j e_i = \delta_{ij} \,.$$

Sia $x = (x^0, x^1, x^2) \in \mathbb{R}^3$, $||x|| = 1$ e consideriamo $e(x) = x^0 e_0 + x^1 e_1 + x^2 e_2$
5.1 Verificare che $e(x)^2 = \mathrm{Id}$.
Consideriamo i due fibrati complessi di rango 1 su S^2, L_+, L_- definiti come segue:

$$(L_\pm)_x := \mathrm{Im}(\frac{1}{2}(\mathrm{Id} \pm e(x))) = \mathrm{Ker}(e(x) \mp \mathrm{Id}) \,.$$

È chiaro che c'è una decomposizione $S^2 \times \mathbb{C}^2 = L_+ \oplus L_-$. Denotiamo con p la proiezione sul primo addendo: quindi

$$p(x) = \frac{1}{2}(\mathrm{Id} + e(x)).$$

Sia ∇ la connessione su L_+ ottenuta dalla connessione banale su $S^2 \times \mathbb{C}^2$ per proiezione.
5.2 Verificare che esiste $C \in \mathbb{R}$ tale che

$$\nabla^2 = C \, d\mathrm{vol}_{S^2} \,.$$