Corso di dottorato. "Il teorema dell'indice di Atiyah-Singer".
Compito a casa del 17/11/00

Esercizio 1. Dimostrare che ogni fibrato vettoriale (complesso) ammette una metrica (hermitiana). Dimostrare che se

$$\mathbf{0} \to E \to G \to F \to \mathbf{0}$$

è una successione esatta di fibrati su M (date voi le necessarie definizioni), allora c'è un isomorfismo di fibrati $G \simeq E \oplus F$.

Esercizio 2. Consideriamo la mappa di Segre

$$\mu : \mathbb{R}P^n \times \mathbb{R}P^m \to \mathbb{R}P^{(n+1)(m+1)-1}$$

definita da

$$([z_0, \dots, z_n], [w_0, \dots, w_m]) \to [z_0 w_0, z_0 w_1, \dots, z_0 w_m, z_1 w_0, \dots, \dots, z_n w_m]\,.$$

Siano $\pi_1 : \mathbb{R}P^n \times \mathbb{R}P^m \to \mathbb{R}P^n$, $\pi_2 : \mathbb{R}P^n \times \mathbb{R}P^m \to \mathbb{R}P^m$ le due proiezioni. Assumiamo preliminarmente che $n = 1$ e $m = 1$. Analizzando le funzioni di transizione dimostrare che in questo caso

$$\mu^*(E_{1,(n+1)(m+1)}) \simeq \pi_1^*(E_{1,n+1}) \otimes \pi_2^*(E_{1,m+1}).$$

Il risultato è vero sempre: provate a dimostrarlo in generale (facoltativo). Provate almeno a prendere $n = 1$, $m = 2$ (facoltativo).

Esercizio 3. Sia $E_{1,n+1}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}P^n$ il fibrato tautologico su

$$G_{1,n+1}(\mathbb{R}) = \mathbb{R}P^n = S^n/\sim$$

che denotiamo per semplicità con $L_{\mathbb{R}}$. Quindi

$$L_{\mathbb{R}} = \{([\underline{x}], \underline{v}) \in \mathbb{R}P^n \times \mathbb{R}^{n+1} : \underline{v} = \lambda \underline{x}\}.$$

Inoltre denotiamo con $\mathbf{1}^k$ il fibrato banale di rango k (e poniamo ovviamente $\mathbf{1}^1 \equiv \mathbf{1}$). Si osservi che $L_{\mathbb{R}}$ è un sottofibrato di $\mathbf{1}^{n+1} \equiv \mathbb{R}P^n \times \mathbb{R}^{n+1}$ e che si ha una decomposizione di fibrati vettorali

$$\mathbf{1}^{n+1} = L_{\mathbb{R}} \oplus L_{\mathbb{R}}^{\perp}$$

dove abbiamo utilizzato la metrica canonica nel fibrato $\mathbf{1}^{n+1}$. Sia $T(\mathbb{R}P^n)$ il fibrato tangente allo spazio proiettivo.

3.1. Verificare che esiste un isomorfismo di fibrati vettoriali

$$T(\mathbb{R}P^n) \simeq \mathrm{Hom}(L_{\mathbb{R}}, L_{\mathbb{R}}^{\perp}).$$

Suggerimento: fate vedere innanzitutto che lo spazio tangente a $[\underline{x}] \in \mathbb{R}P^n$ si può identificare con l'insieme delle coppie di $(n+1)$-ple:

$$\{(-\underline{x}, -\underline{v}), (\underline{x}, \underline{v})\} \quad \text{con} \quad ||\underline{x}|| = 1\,; \;\; \underline{x} \perp \underline{v}$$

Può essere utile pensare al differenziale della proiezione canonica $p : S^n \to \mathbb{R}P^n$. Mandiamo $\{\pm(\underline{x}, \underline{v})\}$ nell'omomorfismo che vale $\underline{v}$ su $([\underline{x}], \underline{x}) \in (L_{\mathbb{R}})_{[\underline{x}]}$.

3.2 Verificare che si ha $\mathbf{1} \simeq \mathrm{Hom}(L_{\mathbb{R}}, L_{\mathbb{R}})$.(Suggerimento: c'è una sezione naturale di $\mathrm{Hom}(L_{\mathbb{R}}, L_{\mathbb{R}})$ che non è mai nulla).

3.3 Verificare che se L è un fibrato di rango 1 dotato di metrica allora c'è un isomorfismo naturale $L \leftrightarrow \mathrm{Hom}(L, \mathbf{1})$).

3.4 Utilizzando le informazioni precedenti verificare che c'è un isomorfismo di fibrati

$$T(\mathbb{R}P^n) \oplus \mathbf{1} \simeq \oplus^{n+1} L_{\mathbb{R}}$$

(prendiamo la somma diretta di $L_{\mathbb{R}}$ con se stesso $n+1$ volte).

Esercizio 4 Sia M una varietà complessa di dimensione n. M è anche una varietà reale di dimensione reale $2n$. Consideriamo il fibrato tangente reale $T(M)$ ed il suo complessificato $T(M)\otimes\mathbb{C}$ $(\cup_{m\in M}T_mM\otimes\mathbb{C})$. Questo è un fibrato complesso di dimensione complessa $2n$. Analogamente $T^*(M)\otimes\mathbb{C}$ è un fibrato complesso di dimensione complessa 2n. Sia $p\in M$ e consideriamo una carta locale intorno a p con coordinate locali $(z_1,\dots,z_n)$. Scriviamo $z_i=x_i+y_i$. Una base locale di $T^*M|_U$ è data $dx_1,dy_1,\dots,dx_n,dy_n$; questa è anche una base per $T^*M|_U\otimes\mathbb{C}$. Poniamo

$$dz_i=dx_i+\sqrt{-1}dy_i\,,\qquad d\overline{z}_i=dx_i-\sqrt{-1}dy_i$$

questa è un'altra base *complessa* di $T^*M|_U\otimes\mathbb{C}$. Vediamo che localmente c'è una decomposizione

$$T^*M|_U\otimes\mathbb{C}=\Lambda^{1,0}M|_U\oplus\Lambda^{0,1}M|_U$$

con il primo sottofibrato generato dai $\{dz_j\}$ ed il secondo fibrato generato da $\{d\overline{z}_j\}$. Dato che M è complessa questa decomposizione risulta essere globale: $T^*M\otimes\mathbb{C}\simeq\Lambda^{1,0}(M)\oplus\Lambda^{0,1}(M)$.

(Per più dettagli su queste nozioni elementari vi rimando, ad esempio, al classico testo di Chern "Complex manifolds without potential theory"; un'altra ottima referenza è Griffiths-Harris "Priciples of Algebraic Geometry"). Ultima informazione: possiamo riguardare ogni fibrato complesso di rango ℓ come un fibrato reale di rango 2ℓ: se facciamo questo per $\Lambda^{1,0}M$ vediamo che esso è isomorfo, in quanto fibrato reale, a T^*M: $T^*M\simeq\Lambda^{1,0}(M)$.

Sia $\mathbb{C}P^n$ lo spazio proiettivo complesso. Negli esercizi del 10/11/00 abbiamo visto una collezione di carte $\{U_i\}_{i=0}^n$ per $\mathbb{C}P^n$ (vi ricordo che $U_j=\{[z_0,\dots,z_n]\,|\,z_j\neq 0\}$). Coordinate locali su U_j sono date da $(\zeta_0^j,\dots,\widehat{j},\dots,\zeta_n^j)$ con

$$\zeta_0^j=\frac{z_0}{z_j},\dots,\zeta_i^j=\frac{z_i}{z_j},\dots,\zeta_n^j=\frac{z_n}{z_j}\,.$$

4.0 Su $U_j\cap U_k$ calcolare $d\zeta_i^j$ in funzione di $\{d\zeta_\ell^k\}$.
Sia $L_{\mathbb{C}}$ il fibrato tautologico su $\mathbb{C}P^n$.
Consideriamo su U_k le funzioni $s^j:U_j\to\mathbb{C}^{n+1}$,

$$s^j([z_0,\dots,z_n])=(\zeta_0^j,\dots,\zeta_n^j)$$

Otteniamo una sezione locale del fibrato tautologico $(L_{\mathbb{C}})|_{U_j}$.
4.1. Collegare s^j e s^k su $U_j\cap U_k$.
Osserviamo che

$$(L_{\mathbb{C}})|_{U_j}\otimes\mathbf{1}^{n+1}=(L_{\mathbb{C}})|_{U_j}\oplus\cdots\oplus(L_{\mathbb{C}})|_{U_j}=(L_{\mathbb{C}})|_{U_j}^{\oplus^{n+1}}$$

e che la sezione s^j induce quindi in maniera naturale una base locale di

$$(L_{\mathbb{C}})|_{U_j}\otimes\mathbf{1}^{n+1}$$

che denotiamo $\{s_i^j\}_{i=1}^n$. L'indice in alto rimane ad indicare la carta locale.
Consideriamo $\phi|_{U_j}:\Lambda^{1,0}(\mathbb{C}P^n)|_{U_j}\to(L_{\mathbb{C}})|_{U_j}\otimes\mathbf{1}^{n+1}$ definita come segue:

$$d\zeta_i^j\;\to\;s_i^j-\zeta_i^js_j^j$$

4.2 Verificare che questa applicazione, che è definita in maniera analoga su ogni carta, si estende ad un'applicazione di fibrati ϕ che è globalmente definita e iniettiva.
4.3 Sia $Q=L_{\mathbb{C}}\otimes\mathbf{1}^{n+1}/\mathrm{Im}(\phi)$ il fibrato quoziente. Questo è ovviamente un fibrato su $\mathbb{C}P^n$. Calcolare il rango di Q (facile). Sia π la proiezione $L_{\mathbb{C}}\otimes\mathbf{1}^{n+1}\to Q$.

Verificare che su $U_j \cap U_k$ si ha $\pi s_k^k = \pi s_j^j$. Dedurne che πs_ℓ^ℓ è definita globalmente come sezione di Q. Dedurne che Q è banale (s_j^j non è mai nell'immagine di ϕ ...).
4.4. Utilizzare l'Es. 1 per verificare che c'è un isomorfismo:

$$\Lambda^{1,0}\mathbb{C}P^n \oplus \mathbf{1} \simeq L_{\mathbb{C}} \otimes \mathbf{1}^{n+1}.$$

4.5 Dedurne che esiste un isomorfismo di fibrati

$$T(\mathbb{C}P^n) \oplus \mathbf{1} \simeq L_{\mathbb{C}}^* \otimes \mathbf{1}^{n+1}.$$

CONCLUSIONE degli Esercizi 3 e 4:
Ci sono isomorfismi

$$\begin{aligned} T(\mathbb{R}P^n) \oplus \mathbf{1} &\simeq L_{\mathbb{R}} \oplus \dots L_{\mathbb{R}} \quad (n+1) - \text{volte} \\ T(\mathbb{C}P^n) \oplus \mathbf{1} &\simeq L_{\mathbb{C}}^* \oplus \dots L_{\mathbb{C}}^* \quad (n+1) - \text{volte}. \end{aligned}$$

Esercizio 5. Sia $S^2 \subset \mathbb{R}^3$ con la metrica indotta dalla metrica canonica di $\mathbb{R}^3$. Sia $U \subset S^2$ l'aperto di S^2 per il quale le coordinate sferiche sono una carta locale. Calcolare la 1-forma della connessione di Levi-Civita di S^2 ristretta ad U. Stesso esercizio per la curvatura.

Esercizio 6. Sia $\widetilde{\nabla}$ la connessione su TS^2 ottenuta dalla connessione banale di $S^2 \times \mathbb{R}^3$ per proiezione dalla decomposizione

$$TS^2 \oplus N = S^2 \times \mathbb{R}^3 = T(\mathbb{R}^3)|_{S^2},$$

con N il fibrato normale (che è banale). Calcolare la 1-forma di connessione di $\widetilde{\nabla}$ su U (vedi l'Es. precedente). Stesso esercizio per la curvatura.