Corso di dottorato. "Il teorema dell'indice di Atiyah-Singer".
Compito a casa del 10/11/00

Esercizio 1. Sia $n > k$ e sia $G_k(\mathbb{R}^n)$ l'insieme dei sottospazi vettoriali k-dimensionali di $\mathbb{R}^n$. Seguendo i passi enunciati qui sotto, dimostrare che $G_k(\mathbb{R}^n)$ è una varietà differenziabile di dimensione $k(n-k)$

- Sia W un sottospazio di dimensione $n-k$ di $\mathbb{R}^n$ e sia
$$O_W = \{V \in G_k(\mathbb{R}^n) \mid V \cap W = \underline{0}\}$$
Sia V_0 un elemento di O_W. Costruire delle applicazioni biettive
$$O_W \leftrightarrow \mathrm{Hom}(V_0, W) \leftrightarrow \mathbb{R}^{k(n-k)}.$$
- Sia $\phi : O_W \to \mathbb{R}^{k(n-k)}$ l'applicazione biettiva appena costruita: definire una topologia di Haudorff in $G_k(\mathbb{R}^n)$ in modo tale che gli O_W siano aperti e le ϕ omeomorfismi.
- Dimostrare che $\{(O_W, \phi)\}$ sono una collezione di carte locali e definire quindi una struttura differenziabile in $G_k(\mathbb{R}^n)$.

Suggerimenti. Per il primo punto procedere come segue:
(i) Dato $A \in \mathrm{Hom}(V_0, W)$ sia $V_A = \{\underline{v} + A\underline{v},\ \underline{v} \in V_0\}$, $V_A \subset \mathbb{R}^n$. Verificare che V_A ha dimensione k e che $V_A \cap W = \underline{0}$.
(ii) Verificare che $\mathbb{R}^n = V_0 \oplus W$. Siano $\pi : \mathbb{R}^n \to V_0$ e $\rho : \mathbb{R}^n \to W$ le rusultanti proiezioni. Verificare che se $V \in O_W$ allora $\pi|_V \in \mathrm{Iso}(V, V_0)$. Poniamo
$$A_V = \rho \circ (\pi|_V)^{-1}.$$
(iii) Utilizzare (i) e (ii) per determinare le due mappe
$$O_W \to \mathrm{Hom}(V_0, W)\ , \quad O_W \leftarrow \mathrm{Hom}(V_0, W)$$
una inversa dell'altra.
(iv) Fissando una base in V_0 ed una base in W costruire il secondo isomorfismo $\mathrm{Hom}(V_0, W) \leftrightarrow \mathbb{R}^{k(n-k)}$.

Esercizio 2. Dimostare che $G_k(\mathbb{R}^n)$ è compatta e connessa (Suggerimento: definire una mappa continua suriettiva di $SO(n)$ in $G_k(\mathbb{R}^n)$.)

Esercizio 3. Sia $E_{k,n}(\mathbb{R}) = \{(p, \underline{v}) \in G_k(\mathbb{R}^n) \times \mathbb{R}^n \mid \underline{v} \in p\}$ e sia $\pi : E_{k,n}(\mathbb{R}) \to G_k(\mathbb{R}^n)$ l'applicazione $(p, \underline{v}) \to p$. Dimostrare che $(E_{k,n}(\mathbb{R}), \pi, G_k(\mathbb{R}^n))$ è un fibrato vettoriale reale di rango k.

Esercizio 4.
4.1. Verificare che $\mathbb{C}P^n$ è una varietà complessa. (Suggerimento: sia $\pi : \mathbb{C}^{n+1} \to \mathbb{C}P^n$ la proiezione canonica e denotiamo $\pi(z_0, \ldots, z_n) = [z_o, \ldots, z_n]$. Consideriamo gli aperti
$$U_i = \{[z_0, \ldots, z_n] \;\; z_i \neq 0\}$$

e le applicazioni $\phi_i : U_i \to \mathbb{C}^n$, $\phi_i[z_0, \dots, z_n] = (z_0/z_i, \dots, \hat{i}, \dots, z_n/z_i)$. Definire a partire da $\{(U_i, \phi)\}$ una struttura di varietà complessa di dimensione (complessa) n.

4.2 Sia L il fibrato universale su $\mathbb{C}P^n$. Verificare che L è un fibrato complesso di rango 1 e olomorfo.

4.3 Consideriamo in particolare $\mathbb{C}P^1$. Descrivere le funzioni di transizione di L^k, $k \in \mathbb{N}$ (con L^k uguale al prodotto tensoriale di L con se stesso k volte). Descrivere le funzioni di transizione di $(L^*)^k$. Poniamo $L^{-k} = (L^*)^k$. Vero o falso : $\ell \neq k \Rightarrow$ *L^ℓ e L^k non sono isomorfi.* (Suggerimenti: prima di tutto vi ricordo che le funzioni di transizione del prodotto tensoriale sono il prodotto tensoriale delle funzioni di transizione. Qui parliamo di un fibrato di rango 1 quindi... Secondo suggerimento per decidere se l'ultima proposizione è vera o falsa: trovare preliminarmente una descrizione dell'isomorfismo fra due fibrati in termini di funzioni di transizione. In altre parole siano (E, π, M) e (E', π', M) due fibrati; supponiamo che $\{U_\alpha\}$ sia un ricoprimento di M con aperti che sono banalizzanti per entrambi i fibrati; supponiamo infine che questi due fibrati siano isomorfi: che relazione c'è fra $\{g_{\alpha\beta}\}$ e $\{g'_{\alpha\beta}\}$?).