Algebra Lineare. Gruppo I-Z. Prof. P. Piazza
Soluzione degli esercizi 6/7 del 18/12/02
e degli esercizi per il periodo 20/12/02 - 8/1/03.

Soluzione esercizio 6 del 18/2.
Si ha $<\underline{f}_1, \underline{f}_2>= \frac{2}{\sqrt{150}} - \frac{2}{\sqrt{150}} = 0$ e quindi i due vettori sono ortogonali.
Si ha

$$||\underline{f}_1|| = 1\,, \quad ||\underline{f}_2|| = 1$$

e quindi i due vettori sono ortonormali. Dato che le coordinate di $\underline{f}_1$ e quelle di $\underline{f}_2$ soddisfano l'equazione del piano, concludiamo che $\{\underline{f}_1, \underline{f}_2\}$ costituiscono una base ortonormale del piano σ.
Per (ii): il suggerimento ci dice che

$$\underline{u}_1 =< \underline{u}, \underline{f}_1 > \underline{f}_1\,, \quad \underline{u}_2 =< \underline{u}, \underline{f}_2 > \underline{f}_2$$

e si tratta solo di fare i due prodotti scalari. Facendo i conti otteniamo $\alpha = -1/\sqrt{5}$, $\beta = 12/\sqrt{30}$ e quindi $\underline{u}_1 = (-2, 1, 0)$, $\underline{u}_2 = (2/5, 4/5, 2)$.
Per giustificare il ragionamento del suggerimento:
sappiamo che $\underline{u} = \underline{u}_1 + \underline{u}_2$ con $\underline{u}_1 = \alpha\underline{f}_1$, $\underline{u}_2 = \beta\underline{f}_2$. Dato che $\underline{f}_1$, $\underline{f}_2$ è una base ortonormale di σ si ha:

$$\begin{aligned} < \underline{u}, \underline{f}_1 > &=< \alpha\underline{f}_1 + \beta\underline{f}_2, \underline{f}_1 >= \alpha < \underline{f}_1, \underline{f}_1 > +\beta < \underline{f}_2, \underline{f}_1 > \\ &= \alpha \cdot 1 + \beta \cdot 0 = \alpha \end{aligned}$$

Quindi $< \underline{u}, \underline{f}_1 >= \alpha$; analogamente $< \underline{u}, \underline{f}_2 >= \beta$, come volevasi.

Soluzione esercizio 7 del 18/2/02.
Basta applicare meccanicamente il procedimento: prima troviamo una base ortogonale, poi la normalizziamo moltiplicando ogni vettore per l'inverso della sua lunghezza.
Applichiamo il procedimento di G-S: $\underline{u}_1 = \underline{w}_1 = (1, 1, 0)$

$$\underline{u}_2 = \underline{w}_2 - \left(\frac{< \underline{w}_2, \underline{u}_1 >}{< \underline{u}_1, \underline{u}_1 >}\right)\underline{u}_1 = (0, 1, 0) - (\frac{1}{2})(1, 1, 0) = (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0)$$

Infine $\underline{u}_3 = \underline{w}_3$ dato che $< \underline{w}_3, \underline{u}_1 >= 0, < \underline{w}_3, \underline{u}_2 >= 0$. La base cercata è quindi:

$$(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0)\,, \quad (-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0)\,, \quad (0, 0, 1)$$

Soluzioni degli esercizi assegnati per il periodo 20/12/02 - 8/1/03.

Soluzione esercizio 1.
Cerchiamo i vettori di coordinate incognite (x_1, x_2, x_3) che
(i) verificano le equazioni del piano generato da $\underline{f}$, $\underline{g}$.
(ii) sono tali che $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 6$
(iii) sono tali che $< (x_1, x_2, x_3), (3, -1, -1) >= 0$, cioè tali che $3x_1 - x_2 - x_3 = 0$.

Per quel che concerne (i), si tratta di scrivere l'equazione cartesiana di un piano a partire da una sua base. Possiamo scrivere

$$\left|\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & x_1 \\ -2 & 0 & x_2 \\ 0 & 1 & x_3 \end{array}\right|$$

ridurre ed imporre la compatibilità (vedi ad esempio il compito del 9/11/02) oppure ragionare utilizzando il determinante: $\underline{x}$ appartiene al piano generato da $\underline{f}$ e $\underline{g}$ sse

$$\det\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ 1 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Ne segue, sviluppando con Laplace secondo la prima riga, che l'equazione del piano $\mathrm{Span}(\underline{f}, \underline{g})$ è

$$2x_1 + x_2 - 4x_3 = 0\,.$$

Torniamo all'esercizio. In definitiva stiamo cercando le soluzioni del seguente sistema (non-lineare):

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 4x_3 = 0 \\ 3x_1 - x_2 - x_3 = 0 \\ x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 6 \end{cases}$$

Per risolvere questo sistema scriviamo prima l'insieme delle triple che verificano le prime 2 equazioni; questo è un sottospazio generato da un unico vettore. Facendo i conti otteniamo che l'insieme delle soluzioni delle prime due equazioni è $(t, 2t, t)$. Una tale tripla soddisfa anche la terza equzione sse $t^2 + 4t^2 + t^2 = 6$ cioè sse $t^2 = 1$. Ne segue che ci sono due soluzioni, corrispondenti a $t = 1, t = -1$. Concludendo, i vettori che verificano le condizioni date sono $\underline{v} = (-1, -2, -1)$, $\underline{w} = (1, 2, 1)$.
Per (ii) : per decidere quale di questi due vettori è $\underline{v}_1$ basterà ragionare sul fatto che il coseno di un angolo ottuso è negativo; inoltre il coseno che un vettore, diciamo $\underline{h}$ di coordinate (l, m, n), forma con $\underline{j}$ è dato da:

$$\cos\widehat{\underline{h}\,\underline{j}} = \frac{<\underline{h}, \underline{j}>}{||\underline{h}|| \cdot 1} = \frac{l \cdot 0 + m \cdot 1 + n \cdot 0}{||\underline{h}||} = \frac{m}{||\underline{h}||}$$

ed è quindi positivo o negativo a seconda che m sia positivo o negativo. Ne segue che dobbiamo scegliere $\underline{v}_1$ uguale a $(-1, -2, -1)$ e la sua proiezione ortogonale su $\underline{f}$, che è data da

$$\left(\frac{<\underline{v}_1, \underline{f}>}{<\underline{f}, \underline{f}>}\right)\underline{f}\,,$$

è $(3/5, -6/5, 0)$.

Soluzione esercizio 2.

(2.1) Un metodo è di determinare due vettori linearmente indipendenti ortogonali a $\underline{u}$, ad esempio

$$(1, -1, 0) \quad \text{e} \quad (0, 1, -1)$$

e poi determinare l'equazione cartesiana del piano vettoriale che li contiene. Si ottiene $x + y + z = 0$

Un secondo metodo, più concettuale ed essenzialmente già visto, è il seguente: il vettore $\underline{v}$ di coordinate incognite (x, y, z) è ortogonale al vettore dato $\underline{u}$ sse $< \underline{u}, \underline{v} >= 0$ cioè sse $1/\sqrt{3} \cdot x + 1/\sqrt{3} \cdot y + 1/\sqrt{3} \cdot z = 0$ cioè sse $x + y + z = 0$. Ne segue che l'equazione cartesiana del piano vettoriale ortogonale a $\underline{u}$ è, come prima, $x + y + z = 0$.

(2.1bis) Sicuramente $T(\underline{u}) = \underline{0}$; infatti $T(\underline{u}) = \underline{u} \wedge \underline{u}$ che è uguale al vettore nullo per definizione di prodotto vettoriale. Ne segue che $\mathbb{R}\underline{u} \subseteq \mathrm{Ker}T$ e quindi $\dim \mathrm{Ker}T \geq 1$. Consideriamo due vettori nel piano vettoriale, τ, ortogonale a $\underline{u}$; siano essi $\underline{f}_1$ e $\underline{f}_2$. Scegliamo questi due vettori *ortonormali.* È facile convincersi, utilizzando esclusivamente la definizione di prodotto vettoriale, che $T(\underline{f}_1) = \underline{f}_2$ oppure $T(\underline{f}_1) = -\underline{f}_2$; brevemente $T(\underline{f}_1) = \pm \underline{f}_2$ e, analogamente, $T(\underline{f}_2) = \pm \underline{f}_1$ (quale segno prendere dipendende dalle orientazioni, more on this later). *Fate una figura.* Ma allora l'immagine di T contiene sicuramente il piano vettoriale τ e quindi $\dim \mathrm{Im}\, T \geq 2$. A questo punto sappiamo che deve essere necessariamente $\dim \mathrm{Ker}T = 1$ perché altrimenti, se questa dimensione fosse uguale a 2, avremmo un'immagine di dimensione 1, il che non può essere. Quindi $\dim \mathrm{Ker}T = 1$ e $\dim \mathrm{Im}\, T = 2$; anzi $\mathrm{Ker}T = \mathbb{R}\underline{u}$, $\quad \mathrm{Im}\, T = \tau$. Notare che il testo dell'esercizio voleva essere: *Sulla base di questi ragionamenti, possiamo affermare che* $\dim \mathrm{Ker}T = 1$ *e* $\dim \mathrm{Im}\, T = 2$ *?* (C'era un errore di stampa.)

(2.2) Basta calcolare le coordinate delle immagini dei vettori della base. Utilizzando la formula per il prodotto vettoriale in coordinate otteniamo:
$T(\underline{i}) = 1/\sqrt{3}\underline{j} - 1/\sqrt{3}\underline{k}$;
$T(\underline{j}) = -1/\sqrt{3}\underline{i} + 1/\sqrt{3}\underline{k}$;
$T(\underline{k}) = 1/\sqrt{3}\underline{i} - 1/\sqrt{3}\underline{j}$.
La matrice cercata è, quindi :

$$\begin{vmatrix} 0 & \frac{-1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{-1}{\sqrt{3}} \\ \frac{-1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 \end{vmatrix} .$$

(2.3) Possiamo scrivere le equazioni cartesiane dell'immagine e del nucleo utilizzando (2.1bis) oppure la matrice appena trovata. Con il secondo approccio otteniamo [1] che $\mathrm{Im}\, T$ è generato, ad esempio, dai primi due vettori colonna ed ha equazione cartesiana $x + y + z = 0$. $\mathrm{Ker}T$ è generato da

[1]riducendo a scala, oppure osservando che la terza colonna è la differenza della prima moltiplicata per -1 e della seconda

un vettore soluzione di $A\underline{x} = \underline{0}$, con A la matrice di (2.2). Si trova che Ker$T = \mathbb{R}\underline{u}$; una riduzione a scala di $A\underline{x} = \underline{0}$ dà le equazioni cartesiane di Ker$T$. Più brevemente, il rango di A è due, e quindi solo le prime due righe di A sono linearmente indipendenti. Ne segue che equazioni cartesiane sono

$$\begin{cases} y - z = 0 \\ x - z = 0 \end{cases}$$

(2.4)(facoltativo) La retta vettoriale data è generata dal vettore $(1, -2, 1)$. Quindi l'immagine di questa retta tramite T è data dal sottospazio generato dal vettore $T(1, -2, 1)$ che è il vettore di coordinate

$$\begin{vmatrix} 0 & \frac{-1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{-1}{\sqrt{3}} \\ \frac{-1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{3}{\sqrt{3}} \\ 0 \\ \frac{-3}{\sqrt{3}} \end{vmatrix}.$$

Per trovare l'immagine di π basta selezionare una base di π e trasformarla. L'immagine di π tramite T sarà il sottospazio generato da questi vettori trasformati. Si trova un piano. Lo stesso procedimento si applica a σ ma l'immagine è una retta. La differenza fra questi due piani è che π ha intersezione banale con Ker(T) mentre σ contiene Ker(T). Questa è la ragione per cui $T(\pi)$ è un piano, mentre $T(\sigma)$ è una retta.

Ulteriori osservazioni sull'esercizio 2 (facoltative) Consideriamo nuovamente il piano vettoriale τ ortogonale a $\underline{u}$ e precisiamo quanto visto in (2.1bis).
Fissiamo $\underline{f}_1$e consideriamo $\underline{f}_2 = \underline{u} \wedge \underline{f}_1$. Si noti che, per definizione di prodotto vettoriale, $\underline{f}_2$ ha lunghezza unitaria ed è ortogonale sia a $\underline{u}$ che a $\underline{f}_1$. *In particolare $\underline{f}_2$ è in τ; $\underline{f}_1$, $\underline{f}_2$ formano una base ortonormale di τ; $\underline{f}_1$, $\underline{f}_2$, $\underline{u}$ formano una base ortonormale di V.* Fate una figura. Si ha:
$T(\underline{f}_1) = \underline{f}_2$, per costruzione. $T(\underline{f}_2) = \underline{u} \wedge (\underline{f}_2)$ è un vettore unitario ortogonale sia a $\underline{u}$ che a $\underline{f}_2$. Quindi $T(\underline{f}_2)$ è uguale a $\underline{f}_1$ oppure a $-\underline{f}_1$. Scriviamo brevemente, come prima, $T(\underline{f}_2) = \pm\underline{f}_1$. Ora sappiamo che $\underline{u}$, $\underline{f}_2$, $\underline{u} \wedge \underline{f}_2$ è una base equiversa alla base fissata (è parte della definizione di prodotto vettoriale). Utilizzando $T(\underline{f}_1) = \underline{f}_2$ e $T(\underline{f}_2) = \underline{u} \wedge \underline{f}_2$ abbiamo allora che $\{\underline{u}, \underline{u} \wedge \underline{f}_1, T(\underline{f}_2)\}$ è una base equiversa a $\{\underline{i}, \underline{j}, \underline{k}\}$. Questo è utile per decidere che segno prendere in $T(\underline{f}_2) = \pm\underline{f}_1$. Facciamo vedere che si deve prendere il segno $-$.
Infatti, sappiamo che $\{\underline{u}, \underline{f}_1, \underline{u} \wedge \underline{f}_1\}$ è equiversa a $\{\underline{i}, \underline{j}, \underline{k}\}$.
Quindi $\{\underline{u}, \underline{u} \wedge \underline{f}_1, \underline{f}_1\}$ è contraversa a $\{\underline{i}, \underline{j}, \underline{k}\}$ e ne segue quindi che $\{\underline{u}, \underline{u} \wedge \underline{f}_1, -\underline{f}_1\}$ è equiversa a $\{\underline{i}, \underline{j}, \underline{k}\}$. Ma allora deve essere $T(\underline{f}_2) = -\underline{f}_1$. In definitiva $T(\underline{f}_1) = \underline{f}_2$ e $T(\underline{f}_2) = -\underline{f}_1$. Nella base $\underline{f}_1, \underline{f}_2, \underline{u}$ l'operatore T ha matrice

$$\begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

Ne segue che il polinomio caratteristico di T ammette una sola radice reale e due radici immaginarie. L'operatore non è quindi diagonalizzabile.

Soluzione esercizio 3. La retta vettoriale di equazione cartesiana

$$x + 2y = 0$$

ha come generatore $(2, -1)$. Un vettore di coordinate incognite (x, y) è ortogonale a $(2, -1)$ sse $< (x, y), (2, -1) >= 0$ cioè se e solo se $2x - y = 0$. Quindi: l'equazione cartesiana della retta cercata è $2x - y = 0$.

Soluzione esercizio 4. Un vettore generatore della retta vettoriale è dato da $(1, 1, 0)$. Un vettore di coordinate incognite (x, y, z) è ortogonale alla retta $\mathbb{R}(1, 1, 0)$ sse $< (x, y, z), (1, 1, 0) >= 0$ cioè sse $x + y = 0$. Questa è l'equazione cartesiana del piano cercato. Per determinare la base $\{\underline{f}_1, \underline{f}_2, \underline{f}_3\}$ scegliamo $\underline{f}_1 = (1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}, 0)$. Fissiamo poi un vettore $\underline{g}_2$ a caso in π; ad esempio $\underline{g}_2 = (1, -1, 0)$. Il vettore $\underline{f}_2 = (1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2}, 0)$ è allora un vettore in π di lunghezza unitaria. Rimane da determinare $\underline{f}_3$. Deve soddisfare le seguenti condizioni:

$$< \underline{f}_3, \underline{f}_3 >= 1\,; \quad \underline{f}_3 \in \pi\,; \quad < \underline{f}_3, \underline{f}_2 >= 0\,.$$

Il vettore $(0, 0, 1)$ soddisfa queste condizioni.
In generale avremmo preso una base $\{\underline{g}_2, \underline{g}_3\}$ in π e l'avremmo poi ortonormalizzata *à la* Gram-Schmidt.

Soluzione esercizio 5. Il vettore $\underline{f} \wedge \underline{g}$ è un vettore che è ortogonale sia ad $\underline{f}$ che a $\underline{g}$. Dalla formula per il prodotto vettoriale otteniamo immediatamente le coordinate di $\underline{f} \wedge \underline{g}$ che sono $(-1, 1, 1)$. I vettori $\lambda(-1, 1, 1)$, $\lambda \in \mathbb{R}$, sono allora tutti ortogonali sia ad $\underline{f}$ che a $\underline{g}$. Basta allora determinare i λ tali che $||(-\lambda, \lambda, \lambda)|| = 2$ e cioè tali che $\sqrt{(-\lambda)^2 + (\lambda)^2 + (\lambda)^2} = 2$. Si trova $\sqrt{3\lambda^2} = 2$, $3\lambda^2 = 4$, $\lambda = \pm 2/\sqrt{3}$. Conclusione: i vettori cercati sono $\{2/\sqrt{3}(-1, 1, 1), -2/\sqrt{3}(-1, 1, 1)\}$.

Soluzione degli esercizi di geometria euclidea.
Soluzione esercizio 6. Ricavando t e sostituendo possiamo passare da equazioni parametriche di s a sue equazioni cartesiane; ad esempio

$$\begin{cases} 2x - y - 2 = 0 \\ 2x + z - 1 = 0 \end{cases}.$$

Il fascio di piani per s ha equazioni

$$\lambda(2x - y - 2) + \mu(2x + z - 1) = 0,$$

al variare di $(\lambda, \mu) \neq (0, 0)$. Riscriviamo l'equazione del piano generico per s come

$$(2\lambda + 2\mu)x - \lambda y + \mu z - 2\lambda - \mu = 0\,.$$

Un vettore ortogonale a questo piano è il vettore di coordinate $(2\lambda+2\mu, -\lambda, \mu)$. Un vettore ortogonale al piano σ è $(1, -1, -1)$. I due piani sono ortogonali sse i rispettivi vettori ortogonali sono fra loro perpendicolari, cioè sse

$$< (2\lambda + 2\mu, -\lambda, \mu), (1, -1, -1) >= 0$$

da cui $3\lambda + \mu = 0$. Scegliendo $\lambda = -1$, $\mu = 3$ [2] otteniamo il piano $4x + y + 3z - 1 = 0$.

Soluzione esercizio 7. Sia $ax + by + cz + d = 0$ l'equazione del piano cercato. Sappiamo che i coefficienti (a, b, c) sono proporzionali ai parametri direttori della retta ortogonale, che è data nel testo dell'esercizio. I parametri direttori di r sono $(4, -5, -1)$ e quindi il nostro piano va cercato fra i piani del fascio improprio:

$$4x - 5y - z + d = 0$$

Imponendo il passaggio per il punto $P(1, 2, 3)$ si trova $d = 9$. L'equazione cercata è quindi

$$4x - 5y - z + 9 = 0\,.$$

Soluzione esercizi di ripasso e di preparazione all'esonero.
Soluzione esercizio 8. La retta cercata è nel piano per P paralleo a π. Il fascio improprio di piani paralleli a π è $x+2y+z+d = 0$ al variare di $d \in \mathbb{R}$; imponendo il passaggio per $P = (1, 1, 2)$ otteniamo il piano $x+2y+z-5 = 0$. Questo piano incontra la retta s nel punto $Q = (8/3, 10/3, -13/3)$[3] . Ma allora la retta cercata è la retta per P e Q; ne segue che la retta cercata ha equazioni parametriche:

$$\begin{cases} x = 1 + \frac{5}{3}t \\ y = 1 + \frac{7}{3}t \\ z = 2 - \frac{19}{3}t \end{cases}$$

Soluzione esercizio 9. Soluzione concettualmente identica a quella dell'esercizio 2. Per la matrice associata ad F nella base fissata si trova:

$$\begin{vmatrix} 0 & -2 & -1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

Il polinomio caratteristico è $P_F(\lambda) = \lambda^3 + 6\lambda$. L'unica radice reale di questo polinomio è $\lambda = 0$ con molteplicità algebrica 1. Ne segue che F non è diagonalizzabile.

Soluzione esercizio 10. Denotiamo con $\{\underline{w}_1, \underline{w}_2, \underline{w}_3\}$ la base *ortogonale* ottenuta tramite il procedimento di Gram-Schmidt. Utilizzando le formule pag 173 (ma attenzione alla notazione diversa) si trova

$$\underline{w}_1 = (1, 2, 2)\,, \quad \underline{w}_2 = (2, 1, -2)\,, \quad \underline{w}_3 = (2, -2, 1)$$

[2]soluzione ben definita a meno di un fattore $k \in \mathbb{R}$ che poi può essere semplificato dall'equazione finale

[3]Si noti che s non è contenuta in $x + 2y + z - 5 = 0$ perché se sostituiamo le coordinate dei punti di s, date dalle equazioni parametriche, non otteniamo un'identità soddisfatta da tutti i $t \in \mathbb{R}$

Non era richiesta la normalizzazione, che però è chiara; basta dividere ogni vettore per la sua lunghezza; si trova così la seguente base ortonormale

$$\underline{h}_1 = (2/3, -2/3, 1/3)\,, \quad \underline{h}_2 = (2/3, 1/3, -2/3)\,, \quad \underline{h}_3 = (2/3, -2/3.1/3)\,.$$

Soluzione esercizio 11.
1. $\det(-A) = -\det A, \qquad \forall A \in M_{nn}(\mathbb{R})$
Falso: sappiamo che in generale $\det(-A) = (-1)^n \det A$ e se n è pari questo numero non è $-\det A$.
2. $\det(A+B) = \det(A) + \det(B), \qquad \forall A, B \in M_{nn}(\mathbb{R})$.
Falso: basta prendere $A = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}$ e $B == \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$.
3. $\det(AB) = \det(BA), \qquad \forall A, B \in M_{nn}(\mathbb{R})$.
Vero: è il teorema di Binet.
4. $P_A(\lambda) = P_{-A}(\lambda), \qquad \forall A \in M_{nn}(\mathbb{R})$.
Falso: sappiamo che il termine noto di $P_A(\lambda)$ è $\det A$ ed il termine noto di $P_{-A}(\lambda)$ è $\det(-A)$ e basta applicare 1 con n dispari.
5. Ogni matrice ortogonale è diagonalizzabile.
Falso: basta prendere la matrice che rappresenta la rotazione di θ, con $\theta \in [0, 2\pi), \theta \neq \pi$, cioè

$$\begin{vmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{vmatrix}$$

Questa matrice è ortogonale ma non ha autovalori reali, quindi non è diagonalizzabile. [4]

Soluzione esercizio 12. Per tre punti non-allineati passa uno ed un solo piano. Per verificare che i tre punti sono non-allineati basta scrivere le equazioni della retta per P_1 e P_2 e verificare che P_3 non soddisfa queste equazioni. Equivalentemente, basta calcolare i vettori direttori delle rette $P_1\,P_2$ e $P_1\,P_3$ e verificare che sono non-proporzionali.
Seguiamo, ad esempio, il primo metodo. Le equazioni parametriche della retta $P_1\,P_2$ sono

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = 2 - t \\ z = t \end{cases}$$

e vediamo subito che P_3 non può appartenere a questa retta dato che la sua prima coordinata è 2. Ne segue che i tre punti sono non-allineati.
Per scrivere l'equazione del piano basta utilizzare la formula (4.14) pag 128 del libro. Si trova l'equazione:

$$6x + y + z - 8 = 0\,.$$

Soluzione esercizio 13.
13.1 F è ben definito perché è lineare e sono assegnati i suoi valori su una base dello spazio vettoriale sul quale è definito.

[4]Potete procedere analiticamente, calcolando il polinomio caratteristico, oppure geometricamente, osservando che una tale rotazione non trasforma alcuna retta in se stessa.

13.2 Sia $\{\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3\}$ la base canonica. Basta verificare che la matrice A ha come j-ma colonna le coordinate, nella base canonica, di $F(\underline{e}_j)$. Utilizzando la linearità si ha
$F(1,0,0) = F((1,1,0)-(0,1,0)) = F(1,1,0) - F(0,1,0) = (-1,3,0) - (0,1,0) = (-1,2,0)$
che è proprio la prima colonna di A. Analogamente si procede per le altre colonne.
13.3 Il polinomio caratteristico di F si può calcolare utilizzando la matrice A: otteniamo $P_T(\lambda) = P_A(\lambda) = (1-\lambda)(1-\lambda)(-1-\lambda)$. Ne segue che F ha autovalori 1 con molteplicità algebrica 2 e -1 con molteplicità algebrica 1. L'autospazio V_{-1} ha automaticamente dimensione 1; l'autospazio $V_1 = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^3 \mid (A - I_3)\underline{x} = \underline{0}\}$ ha dimensione $3 - 1 = 2$, come subito si verifica osservando che

$$A - I_3 = \begin{vmatrix} -2 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

che ha rango 1. Per il Teorema fondamentale segue che F è diagonalizzabile (le radici del polinomio caratteristico sono reali e la molteplicità algebrica di ciascun autovalore è uguale alla molteplicità geometrica). Una base di autovettori si trova determinando due vettori linearmente indipendenti in V_1 ed un generatore della retta V_{-1}. Dal fatto che $V_1 = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^3 \mid (A-I_3)\underline{x} = \underline{0}\}$ segue che

$$V_1 = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 - x_3 = 0\}$$

ed una base di V_1 è allora

$$(1,0,1)\,, \quad (0,1,0)\,.$$

Analogamente V_{-1} ha equazioni cartesiane

$$\begin{cases} x_3 = 0 \\ 2x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 0 \end{cases}$$

e queste equazioni rappresentano la retta $\mathbb{R}(1,-1,0)$. In definitiva

$$(1,0,1)\,, \quad (0,1,0)\,, \quad (1,-1,0)$$

è una base di autovettori. La matrice associata ad F in questa base è

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}\,.$$

13.4 F è iniettiva e suriettiva dato che $\det \Delta = -1 \neq 0$.

BUON ANNO !