Algebra Lineare. Gruppo I-Z. Prof. P. Piazza

Compito per il fine settimana del 23/24 Novembre 2002.

Esercizio 1. Sia $V = \mathbb{R}^2$. Verificare che i seguenti 2 vettori sono una base di $\mathbb{R}^2$:

$$\underline{v}_1 = (1,2)\,, \quad \underline{v}_2 = (-1,1).$$

Verificare che i seguenti 2 vettori sono un'altra base di $\mathbb{R}^2$:

$$\underline{u}_1 = (1,1)\,, \quad \underline{u}_2 = (1,0)$$

Sia $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ l'operatore lineare definito da

$$T\underline{v}_1 = \underline{u}_1 - \underline{u}_2\,, \quad T\underline{v}_2 = \underline{u}_1 + 3\underline{u}_2$$

Utilizzando opportune matrici di cambiamento di coordinate risolvere i seguenti esercizi:

1.1 Determinare la matrice associata a T con la scelta di basi:
base partenza = $\{\underline{v}_1, \underline{v}_2\}$ base arrivo = $\{\underline{u}_1, \underline{u}_2\}$

1.2 Determinare la matrice associata a T con la scelta di basi:
base partenza = $\{\underline{v}_1, \underline{v}_2\}$ base arrivo = $\{\underline{v}_1, \underline{v}_2\}$

1.3 Determinare la matrice associata a T con la scelta di basi:
base partenza = $\{\underline{u}_1, \underline{u}_2\}$ base arrivo = $\{\underline{v}_1, \underline{v}_2\}$

1.4 Determinare la matrice associata a T con la scelta di basi:
base partenza = $\{\underline{u}_1, \underline{u}_2\}$ base arrivo = $\{\underline{u}_1, \underline{u}_2\}$

Esercizio 2. $V = \mathbb{R}^3$ con base canonica $\underline{e}_1 = (1,0,0)$, $\underline{e}_2 = (0,1,0)$, $\underline{e}_3 = (0,0,1)$. Sia F l'applicazione lineare definita da

$$F(1,1,0) = (1,2,-1)\,, \quad F(0,1,1) = (-1,1,1)\,, \quad F(0,0,1) = (-1,0,1)$$

Utilizzando opportune matrici di cambiamento di coordinate, determinare la matrice associata ad F nella base canonica (quindi, base di partenza e base di arrivo uguali alla base canonica). Determinare le coordinate rispetto alla base canonica dei vettori di una base per il nucleo ed di una base per l'immagine.

Soluzione esercizi per il fine settimana del 23/24 Novembre.

Soluzione esercizio 1. Il testo dell'esercizio fornisce l'informazione

$$T\underline{v}_1 = \underline{u}_1 - \underline{u}_2\,, \qquad T\underline{v}_2 = \underline{u}_1 + 3\underline{u}_2\,;$$

questo vuol dire che il testo dell'esercizio fornisce la matrice richiesta in **1.1**, e cioè la matrice, chiamiamola A_1, associata a T con la scelta di basi:

$$\text{base partenza} = \{\underline{v}_1, \underline{v}_2\}\,, \quad \text{base arrivo} = \{\underline{u}_1, \underline{u}_2\}.$$

Vi ricordo infatti che la matrice A_1 è la matrice che ha come j-ma colonna le coordinate di $T\underline{v}_j$ rispetto alla base $\underline{u}_1, \underline{u}_2$. Quindi

$$A_1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix}.$$

Si tratta ora di utilizzare la formula (4.7) del Cap. V (pag. 157) per trovare le matrici richieste in **1.2, 1.3, 1.4.**

Cominciamo con **1.2** e sia A_2 la matrice cercata. Sia $I = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$ la matrice identità 2×2. La formula (4.7) pag. 157 ci dice che

$$A_2 = D^{-1} A_1 I = D^{-1} A_1$$

dove D è la matrice che ha come prima colonna le coordinate di $\underline{v}_1$ rispetto a $\{\underline{u}_1, \underline{u}_2\}$ e come seconda colonna le coordinate di $\underline{v}_2$ rispetto a $\{\underline{u}_1, \underline{u}_2\}$.

È bene riassumere schematicamente la situazione.

Schematicamente abbiamo

$$A_1 \text{ associata alla scelta } \{\underline{v}_1, \underline{v}_2\} \quad \{\underline{u}_1, \underline{u}_2\}$$

$$\mathbf{A_2} \text{ associata alla scelta } \{\underline{\mathbf{v}}_\mathbf{1}, \underline{\mathbf{v}}_\mathbf{2}\} \quad \{\underline{\mathbf{v}}_\mathbf{1}, \underline{\mathbf{v}}_\mathbf{2}\}$$

$$\begin{vmatrix} \underline{\mathbf{v}}_\mathbf{1} & \underline{\mathbf{v}}_\mathbf{2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \underline{v}_1 & \underline{v}_2 \end{vmatrix} I, \quad \begin{vmatrix} \underline{\mathbf{v}}_\mathbf{1} & \underline{\mathbf{v}}_\mathbf{2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \underline{u}_1 & \underline{u}_2 \end{vmatrix} D$$

$$\mathbf{A_2} = D^{-1} A_1 I$$

Per determinare D^{-1} possiamo determinare prima D e poi calcolare la sua inversa *oppure* ricordarci che D^{-1} è la matrice tale che

$$\begin{vmatrix} \underline{u}_1 & \underline{u}_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \underline{\mathbf{v}}_\mathbf{1} & \underline{\mathbf{v}}_\mathbf{2} \end{vmatrix} D^{-1}$$

e cioè la matrice che ha come prima colonna le coordinate di $\underline{u}_1 = (1,1)$ rispetto alla base $\underline{v}_1, \underline{v}_2$ e come seconda colonna le coordinate di $\underline{u}_2 = (1,0)$ rispetto alla base $\{\underline{v}_1, \underline{v}_2\}$. Impostando il sistemino $(1,1) = \alpha(1,2) + \beta(-1,1)$ e risolvendo scopriamo che

$$(1,1) = \frac{2}{3}(1,2) + (-\frac{1}{3})(-1,1)$$

Analogamente

$$(1,0) = \frac{1}{3}(1,2) + (-\frac{2}{3})(-1,1)$$

Ne segue che

$$D^{-1} = \begin{vmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \end{vmatrix}$$

e quindi in definitiva

$$A_2 = \begin{vmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1/3 & 5/3 \\ 1/3 & -7/3 \end{vmatrix}$$

Passiamo a **1.3.** Sia A_3 la matrice cercata. È chiaro dalla soluzione di **1.2** che conviene determinare A_3 sulla base di A_2 perché in tale maniera una delle matrici che compaiono nella formula pag 157 sarà l'identità. Ciò sarà charo dallo schemino che segue. Schematicamente abbiamo infatti

$$A_2 \text{ associata alla scelta } \{\underline{v}_1, \underline{v}_2\} \quad \{\underline{v}_1, \underline{v}_2\}$$

$$A_3 \text{ associata alla scelta } \{\underline{\mathbf{u}}_\mathbf{1}, \underline{\mathbf{u}}_\mathbf{2}\} \quad \{\underline{\mathbf{v}}_\mathbf{1}, \underline{\mathbf{v}}_\mathbf{2}\}$$

$$\begin{vmatrix} \underline{\mathbf{u}}_\mathbf{1} & \underline{\mathbf{u}}_\mathbf{2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \underline{v}_1 & \underline{v}_2 \end{vmatrix} D^{-1}, \quad \begin{vmatrix} \underline{\mathbf{v}}_\mathbf{1} & \underline{\mathbf{v}}_\mathbf{2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \underline{v}_1 & \underline{v}_2 \end{vmatrix} I$$

$$\mathbf{A_3} = I^{-1} A_2 D^{-1} = A_2 D^{-1}$$

A questo punto basta fare il prodotto.

Consideriamo **1.4.** e sia A_4 la matrice cercata. In questo caso conviene determinarla utilizzando A_1 oppure A_3. Facciamolo con A_1. Schematicamente abbiamo allora

$$A_1 \text{ associata alla scelta } \{\underline{v}_1, \underline{v}_2\} \quad \{\underline{u}_1, \underline{u}_2\}$$

$$A_4 \text{ associata alla scelta } \{\underline{\mathbf{u}}_\mathbf{1}, \underline{\mathbf{u}}_\mathbf{2}\} \quad \{\underline{\mathbf{u}}_\mathbf{1}, \underline{\mathbf{u}}_\mathbf{2}\}$$

$$\left|\ \mathbf{\underline{u}_1} \quad \mathbf{\underline{u}_2}\ \right| = \left|\ \underline{v}_1 \quad \underline{v}_2\ \right| D^{-1}\,, \qquad \left|\ \mathbf{\underline{u}_1} \quad \mathbf{\underline{u}_2}\ \right| = \left|\ \underline{u}_1 \quad \underline{u}_2\ \right| I$$

$$\mathbf{A_4} = I^{-1} A_1 D^{-1} = A_1 D^{-1}$$

e di nuovo basta ora fare il prodotto.

Osservazione. Per una soluzione alternativa vi invito a leggere i complementi che seguono.

Soluzione esercizio 2. Daremo 2 soluzioni equivalenti di questo esercizio. Per una terza soluzione vi invito a leggere i complementi che seguono.

Soluzione n. 1. Faremo di nuovo uso della formula vista nella Sezione 4 del Capitolo 5, pag. 157. In questo caso $V = W (= \mathbb{R}^3)$. Consideriamo la base

$$\underline{e}_1' = (1,1,0) \quad \underline{e}_2' = (0,1,1)\,, \quad \underline{e}_3' = (0,0,1)$$

I dati del problema forniscono immediatamente la matrice A associata ad F rispetto alla seguente scelta di basi:

$$\text{base di partenza} = \{\underline{e}_1', \underline{e}_2', \underline{e}_3'\}\,, \quad \text{base di arrivo} = \text{base canonica}\,.$$

Vi ricordo infatti che tale matrice è, per definizione, la matrice che ha come j-ma colonna le coordinate, nella base di arrivo, del vettore $F(\underline{e}_j')$. Ma questa è proprio l'informazione che ci viene data dal testo del problema. Quindi

$$A = \left|\begin{array}{ccc} 1 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{array}\right|\,.$$

Vogliamo ora determinare la matrice B associata ad F rispetto alla scelta di basi

$$\text{base di partenza} = \text{base canonica}\,, \quad \text{base di arrivo} = \text{base canonica}\,.$$

Lo schema è il seguente. Sia I_3 la matrice identità 3×3.

$$A \text{ associata a } \{\underline{e}_1', \underline{e}_2', \underline{e}_3'\}\,, \qquad \{\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3\}.$$

$$\mathbf{B} \text{ associata a } \{\mathbf{\underline{e}_1}, \mathbf{\underline{e}_2}, \mathbf{\underline{e}_3}\}\,, \qquad \{\mathbf{\underline{e}_1}, \mathbf{\underline{e}_2}, \mathbf{\underline{e}_3}\}.$$

Per la formula vista a lezione

$$\mathbf{B} = I_3^{-1}\, A\, C = A\, C$$

con C la matrice che ha come colonne le coordinate dei vettori della base $\{\mathbf{\underline{e}_1}, \mathbf{\underline{e}_2}, \mathbf{\underline{e}_3}\}$ rispetto alla base $\{\underline{e}_1', \underline{e}_2', \underline{e}_3'\}$: schematicamente

$$\left|\ \mathbf{\underline{e}_1} \quad \mathbf{\underline{e}_2} \quad \mathbf{\underline{e}_3}\ \right| = \left|\ \underline{e}_1' \quad \underline{e}_2' \quad \underline{e}_3'\ \right| C, \qquad \left|\ \mathbf{\underline{e}_1} \quad \mathbf{\underline{e}_2} \quad \mathbf{\underline{e}_3}\ \right| = \left|\ \underline{e}_1 \quad \underline{e}_2 \quad \underline{e}_3\ \right| I_3$$

Questa matrice C è al momento sconosciuta; d'altra parte essa è l'inversa della matrice C' che ha come colonne le coordinate dei vettori $\{\underline{e}_1', \underline{e}_2', \underline{e}_3'\}$ nella base $\{\mathbf{\underline{e}_1}, \mathbf{\underline{e}_2}, \mathbf{\underline{e}_3}\}$ (che è la base canonica). Quest'ultima matrice è invece nota perché è data nel testo del problema

$$C' = \left|\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{array}\right|\,.$$

Quindi

$$C = (C')^{-1} = \left(\left|\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{array}\right| \right)^{-1}$$

da cui, calcolando l'inversa,

$$C = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}.$$

Concludendo

$$\mathbf{B} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Possiamo ora utilizzare B per rispondere all'ultimo quesito dell'esercizio. Il rango di B è due, come subito si verifica applicando l'eliminazione di Gauss-Jordan. L'immagine di F è quindi generata da due vettori colonna di B non-proporzionali, ad esempio il primo ed il secondo.

Il nucleo di F è il sottospazio vettoriale soluzione del sistema lineare omogeneo $B\underline{x} = \underline{0}$.Dato che il rango è 2 si ha che $\mathrm{Ker}F$ è un sottospazio di dimensione $3 - 2 = 1$. Risolvendo il sistema otteniamo che un generatore di $\mathrm{Ker}F$ è $(1, -1, 1)$, quindi $\mathrm{Ker}F = \mathrm{Span}(1, -1, 1)$.

Soluzione n. 2. Usiamo la linearità di F come nell'esercizio 6 dell'esonero. Vogliamo calcolare le coordinate di $F(\underline{e}_1)$, $F(\underline{e}_2)$, $F(\underline{e}_3)$ nella base canonica; queste saranno le colonne della matrice cercata. Esprimiamo allora $\underline{e}_1$ come combinazione lineare degli elementi della nuova base $\{\underline{e}'_j\}$, perché è su questi vettori che sappiamo calcolare F, ed applichiamo la linearità di F. In questo caso l'espressione di $(1, 0, 0)$ in funzione di $\{\underline{e}'_j\}$ è molto facile a stabilirsi:

$$(1, 0, 0) = (1, 1, 0) - (0, 1, 1) + (0, 0, 1)$$

Quindi
$F(1, 0, 0) = F((1, 1, 0) - (0, 1, 1) + (0, 0, 1)) = F(1, 1, 0) - F(0, 1, 1) + F(0, 0, 1) =$
$(1, 2, -1) - (-1, 1, 1) + (-1, 0, 1) = (1, 1 - 1)$
che è proprio la prima colonna della matrice B trovata nella soluzione n. 1. Analogamente
$F(0, 1, 0) = F((0, 1, 1) - (0, 0, 1)) = F(0, 1, 1) - F(0, 0, 1) =$
$(-1, 1, 1) - (-1, 0, 1) = (0, 1, 0)$
che è la seconda colonna della matrice B. Notiamo che $F(0, 0, 1)$ è dato nel testo dell'esercizio. La soluzione è completa (ritroviamo B, come deve essere).

Osservazione sulla soluzione n. 2. In questo caso era particolarmente semplice scrivere le coordinate dei vettori della base canonica rispetto alla base $\{\underline{e}'_j\}$. In generale bisognerà impostare 3 sistemi 3×3 o, più intelligentemente, scrivere la matrice che dà le coordinate di $\{\underline{e}'_j\}$ rispetto a $\{\underline{e}_i\}$ e poi prenderne l'inversa (che è ciò che abbiamo fatto nella soluzione n. 1).

Complementi sui cambiamenti di coordinate.

Questi complementi sono facoltativi. Vogliamo introdurre una notazione che semplifichi la trattazione di quei problemi che coinvolgono cambiamenti di coordinate etc...
Fissiamo innanzitutto la notazione.

V è uno spazio vettoriale di dimensione n.
$\{\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_2\}$ è una base di V.
Dato che il nostro scopo è quello di introdurre una notazione compatta sarà bene utilizzare un simbolo compatto per questa base. Potremmo decidere per $\underline{v}$, ma poi c'è il pericolo di confondersi con il generico vettore $\underline{v}$ di V. Propendiamo per $\mathbb{V}$. Quindi $\mathbb{V} = \{\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n\}$.

U è un secondo spazio vettoriale di dimensione k con base $\mathbb{U} = \{\underline{u}_1, \dots, \underline{u}_k\}$.

W è un terzo spazio vettoriale di dimensione m con una base $\mathbb{W} = \{\underline{w}_1, \dots, \underline{w}_m\}$.

Supponiamo di avere due applicazioni lineari $F : V \to U$ e $G : U \to W$. Rimane definita l'applicazione composta $G \circ F : V \to W$. È facile vedere che l'applicazione composta è ancora lineare: ad es. $(G \circ F)(\underline{v} + \underline{v}') = G(F(\underline{v} + \underline{v}')) = G(F\underline{v} + F\underline{v}') = G(F\underline{v}) + G(F\underline{v}') = (G \circ F)(\underline{v}) + (G \circ F)(\underline{v}')$, come deve essere.

L'applicazione $F : V \to U$ ha una matrice associata, con base di partenza $\mathbb{V}$ e base di arrivo $\mathbb{U}$. Vi ricordo che questa è la matrice $k \times n$ che *ha come j-ma colonna le coordinate di $F(\underline{v}_j)$ nella base* $\mathbb{U}$. Invece di denotare questa matrice semplicemente con A la denotiamo con

$$M_{\mathbb{U},\mathbb{V}}(F) .$$

Notare la posizione scambiata delle due basi rispetto alla posizione degli spazi vettoriali nella scrittura dell'applicazione $F : V \to U$.
Analogamente $G : U \to W$ ha una matrice associata $M_{\mathbb{W},\mathbb{U}}(G)$; questa è la matrice $m \times k$ che ha come j-ma colonna le coordinate di $G(u_j)$ nella base $\mathbb{W}$.
Ovviamente possiamo anche considerare l'applicazione lineare $G \circ F : V \to W$ e la sua matrice rispetto alle basi $\mathbb{V}$ e $\mathbb{W}$. Questa è una matrice $m \times n$ e la denotiamo ovviamente con $M_{\mathbb{W},\mathbb{V}}(G \circ F)$.
Proposizione. Si ha

$$M_{\mathbb{W},\mathbb{V}}(G \circ F) = M_{\mathbb{W},\mathbb{U}}(G) \cdot M_{\mathbb{U},\mathbb{V}}(F)$$

dove a destra c'è il prodotto righe per colonne delle due matrici.
Quindi le due basi al centro "si elidono".
La dimostrazione della proposizione coinvolge argomentazioni del tutto simili a quelle date nella Sezione 4 del Capitolo 5.

Corollario. Se T ed S sono due endomorfismi di V, $T : V \to V$, $S : V \to V$, e $\mathbb{V}$ è una base di V allora

$$M_{\mathbb{V},\mathbb{V}}(S \circ T) = M_{\mathbb{V},\mathbb{V}}(S) \cdot M_{\mathbb{V},\mathbb{V}}(T)$$

A parole: *una volta fissata una base di V, la matrice associata alla composizione di due endomorfismi è il prodotto righe per colonne delle matrici associate ai singoli endomorfismi.*

Supponiamo di avere un'applicazione lineare $T : V \to W$; supponiamo di fissare una base $\mathbb{V}$ in V e una base $\mathbb{W}$ in W. Abbiamo una matrice che abbiamo denotato con A. Supponiamo di fissare due basi diverse, $\mathbb{V}'$ in V e $\mathbb{W}'$ in W. Abbiamo una matrice che abbiamo denotato con B. Abbiamo poi introdotto la matrice C che ha come j-ma colonna le coordinate di $\underline{v}'_j$ nella base $\mathbb{V}$. Infine, abbiamo considerato la matrice D che ha come j-ma colonna le coordinate di $\underline{w}'_j$ nella base $\mathbb{W}$. Abbiamo poi *dimostrato* che

$$B = D^{-1}AC$$

Vogliamo riscrivere questa formula con la nuova notazione.

Consideriamo quindi le due basi in V

$$\mathbb{V} = \{\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_n\}, \quad \mathbb{V}' = \{\underline{v}'_1, \ldots, \underline{v}'_n\}$$

Abbiamo incontrato qui sopra la matrice C che ha come j-ma colonna le coordinate di $\underline{v}'_j$ nella base $\mathbb{V}$.

Chi è questa matrice nella nuova notazione ?

Consideriamo l' applicazione identità in V: questa è l'applicazione $\underline{v} \to \underline{v}\ \forall \underline{v}$, cioè l'applicazione che manda ogni $\underline{v}$ in se stesso. La denotiamo con Id_V o più semplicemnte con Id se non c'è rischio di confusione.

È quasi ovvio che $M_{\mathbb{V},\mathbb{V}}(\mathrm{Id}) = I_n$ dove a destra c'è la matrice identità $n \times n$. [1]

Più interesante è capire chi è $M_{\mathbb{V},\mathbb{V}'}(\mathrm{Id})$: questa è la matrice che ha come j-ma colonna le coordinate di $\mathrm{Id}(\underline{v}'_j)$ nella base $\mathbb{V}$; dato che $\mathrm{Id}(\underline{v}'_j) = \underline{v}'_j$ scopriamo che $M_{\mathbb{V},\mathbb{V}'}(\mathrm{Id})$ *è la matrice che ha come j-ma colonna le coordinate di* $\underline{v}'_j$ *nella base* $\mathbb{V}$; ma questa è per definizione la nostra matrice C. Quindi

$$C = M_{\mathbb{V},\mathbb{V}'}(\mathrm{Id}).$$

Analogamente

$$M_{\mathbb{W},\mathbb{W}'}(\mathrm{Id}) = D$$

Si noti che per la proposizione

$$M_{\mathbb{W},\mathbb{W}'}(\mathrm{Id}) \cdot M_{\mathbb{W}',\mathbb{W}}(\mathrm{Id}) = M_{\mathbb{W},\mathbb{W}}(\mathrm{Id} \circ \mathrm{Id}) = M_{\mathbb{W},\mathbb{W}}(\mathrm{Id}) \text{ (ovviamente } \mathrm{Id} \circ \mathrm{Id} = \mathrm{Id})$$

e dato che a destra c' è la matrice identità scopriamo che

$$M_{\mathbb{W}',\mathbb{W}}(\mathrm{Id}) = (M_{\mathbb{W},\mathbb{W}'}(\mathrm{Id}))^{-1}$$

quindi, in definitiva

$$M_{\mathbb{W}',\mathbb{W}}(\mathrm{Id}) = D^{-1}$$

Quest'ultima formula esprime il fatto, ormai a voi noto, che la matrice D' che ha come j-ma colonna le coordinate di $\underline{w}_j$ rispetto alla base $\mathbb{W}'$ altri non è che D^{-1}. Possiamo allora riscrivere la formula $B = D^{-1}AC$ come segue:

$$M_{\mathbb{W}',\mathbb{V}'}(T) = M_{\mathbb{W}',\mathbb{W}}(\mathrm{Id}) \cdot M_{\mathbb{W},\mathbb{V}}(T) \cdot M_{\mathbb{V},\mathbb{V}'}(\mathrm{Id}) \quad \textbf{(formula magica)}$$

o, equivalentemente,

$$M_{\mathbb{W}',\mathbb{V}'}(T) = (M_{\mathbb{W},\mathbb{W}'}(\mathrm{Id}))^{-1} \cdot M_{\mathbb{W},\mathbb{V}}(T) \cdot M_{\mathbb{V},\mathbb{V}'}(\mathrm{Id})\,;$$

---

[1] Infatti la matrice $M_{\mathbb{V},\mathbb{V}}(\mathrm{Id})$ ha come j-ma colonna le coordinate di $\mathrm{Id}(\underline{v}_j)$ rispetto alla base $\mathbb{V} = \{\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_n\}$, cioè le coordinate di $\underline{v}_j$ rispetto alla base $\{\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_n\}$; ma

$$\underline{v}_j = 0\underline{v}_1 + 0\underline{v}_2 + \cdots + 0\underline{v}_{j-i} + 1\underline{v}_j + 0\underline{v}_{j+1} + \cdots + 0\underline{v}_n$$

da cui segue l'asserto.

Il vantaggio di riguardare la formula dimostrata a lezione come la formula magica è che quest'ultima fa apparire in maniera molto precisa le basi coinvolte. Già negli esercizi, ma anche in generale, da un punto di vista teorico, questa precisione è estremamente utile. Vediamolo negli esercizi dati:

Nuova soluzione esercizio 1. Consideriamo le domande 1.1 $\to$ 1.4. Adottiamo la notazione $\mathbb{U}$ e $\mathbb{V}$ per le due basi. L'esercizio ci fornisce le coordinate di $T(\underline{v}_1)$ e $T(\underline{v}_2)$ nella base $\mathbb{U}$. Quindi abbiamo $M_{\mathbb{U},\mathbb{V}}(T)$:

$$M_{\mathbb{U},\mathbb{V}}(T) = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix}.$$

Ora, dalla formula magica otteniamo subito le altre 3 matrici
1.2. ci chiede di scrivere $M_{\mathbb{V},\mathbb{V}}(T)$. Per la formula magica

$$M_{\mathbb{V},\mathbb{V}}(T) = M_{\mathbb{V},\mathbb{U}}(\mathrm{Id}) \cdot M_{\mathbb{U},\mathbb{V}}(T)$$

dove non abbiamo scritto la terza matrice $M_{\mathbb{V},\mathbb{V}}(\mathrm{Id})$ perché è uguale all'identità. Ora, $M_{\mathbb{V},\mathbb{U}}(\mathrm{Id})$ è la matrice che ha come prima colonna le coordinate di $\underline{u}_1$ nella base $\mathbb{V}$ e come seconda colonna le coordinate di $\underline{u}_2$ in $\mathbb{V}$; abbiamo già calcolato questa matrice nella prima soluzione di quest'esercizio, ottendendo quindi

$$M_{\mathbb{V},\mathbb{U}}(\mathrm{Id}) = \begin{vmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \end{vmatrix}$$

Calcolando il prodotto $M_{\mathbb{V},\mathbb{U}}(\mathrm{Id}) \cdot M_{\mathbb{U},\mathbb{V}}(T)$ otteniamo $M_{\mathbb{V},\mathbb{V}}(T)$. Notare come la notazione introdotta ci suggerisca in maniera naturale la soluzione dell'esercizio !
1.3. ci chiede $M_{\mathbb{V},\mathbb{U}}(T)$; per la formula magica

$$M_{\mathbb{V},\mathbb{U}}(T) = M_{\mathbb{V},\mathbb{U}}(\mathrm{Id}) \cdot M_{\mathbb{U},\mathbb{V}}(T) \cdot M_{\mathbb{V},\mathbb{U}}(\mathrm{Id}) \,,$$

prodotto che sappiamo a questo punto calcolare. Notiamo che applicando la Proposizione alle due prime matrici a destra si ha anche

$$M_{\mathbb{V},\mathbb{U}}(\mathrm{Id}) \cdot M_{\mathbb{U},\mathbb{V}}(T) = M_{\mathbb{V},\mathbb{V}}(T)$$

da cui otteniamo anche

$$M_{\mathbb{V},\mathbb{U}}(T) = M_{\mathbb{V},\mathbb{V}}(T) \cdot M_{\mathbb{V},\mathbb{U}}(\mathrm{Id})$$

e anche in questo caso conosciamo le matrici a destra e possiamo fare il prodotto.
1.4 ci chiede $M_{\mathbb{U},\mathbb{U}}(T)$. Per la formula magica questa matrice è uguale a

$$M_{\mathbb{U},\mathbb{V}}(T) \cdot M_{\mathbb{V},\mathbb{U}}(\mathrm{Id}) \,;$$

queste due matrici le conosciamo e calcolando il prodotto abbiamo finito.

Nuova soluzione esercizio 2 Facciamo uso della formula magica appena spiegata. Sia $\mathbb{E}$ la base canonica e sia $\mathbb{E}'$ la base $\{\underline{e}'_1, \underline{e}'_2, \underline{e}'_3\}$. Vogliamo determinare $M_{\mathbb{E},\mathbb{E}}(F)$. È bene capire quali sono le informazioni di cui siamo in possesso: il testo dell'esercizio ci dà $M_{\mathbb{E},\mathbb{E}'}(F)$ e $M_{\mathbb{E},\mathbb{E}'}(\mathrm{Id})$ [2]. La formula magica ci dice che

$$M_{\mathbb{E},\mathbb{E}}(F) = M_{\mathbb{E},\mathbb{E}'}(F) \cdot M_{\mathbb{E}',\mathbb{E}}(\mathrm{Id})$$

[2]Infatti, come già osservato

$$M_{\mathbb{E},\mathbb{E}'}(F) = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix}, \quad M_{\mathbb{E},\mathbb{E}'}(\mathrm{Id}) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

Inoltre sappiamo che
$$M_{\mathbb{E}',\mathbb{E}}(\mathrm{Id}) = \left(M_{\mathbb{E},\mathbb{E}'}(\mathrm{Id})\right)^{-1}$$
Ma allora
$$M_{\mathbb{E},\mathbb{E}}(F) = M_{\mathbb{E},\mathbb{E}'}(F)\left(M_{\mathbb{E},\mathbb{E}'}(\mathrm{Id})\right)^{-1}$$
e ritroviamo la soluzione già vista.