Geometria 1. I^0 Modulo. a.a. 00/01. Gruppo E-N
Esercizi per casa del 21/12/00

Esercizio 1. $V = \mathbb{R}^3$ con base canonica $\underline{e}_1 = (1,0,0)$, $\underline{e}_2 = (0,1,0)$, $\underline{e}_3 = (0,0,1)$. Sia F l'applicazione lineare definita da

$$F(1,1,0) = (1,2,-1)\,, \quad F(0,1,1) = (-1,1,1)\,, \quad F(0,0,1) = (-1,0,1)$$

Utilizzando un'opportuna matrice di cambiamento di coordinate, determinare la matrice associata ad F nella base canonica (quindi, base di partenza e base di arrivo uguali alla base canonica).
Determinare equazioni cartesiane per l'immagine e per il nucleo di F.

Esercizio 2 . $V = \mathbb{R}^3$ con base canonica $\underline{e}_1 = (1,0,0)$, $\underline{e}_2 = (0,1,0)$, $\underline{e}_3 = (0,0,1)$. Sia $S : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ l'operatore lineare definito dalle relazioni

$$S(1,1,2) = (3,-1,2) \quad S(2,1,0) = (-2,5,0) \quad S(0,0,1) = (2,-2,1).$$

Determinare la matrice associata ad S nella base canonica $\underline{e}$.

Esercizio 3. Spazio vettoriale $\mathbb{R}^3$ con base $\underline{e}_1$, $\underline{e}_2$, $\underline{e}_3$ canonica fissata e coordinate associate (x_1, x_2, x_3). Siano $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ e $S : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ gli operatori lineari definiti dalle matrici

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix}, \quad B = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -3 \\ -1 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 3 \end{vmatrix}.$$

(3.1) Verificare che $\mathrm{Im}(S) = \mathrm{Ker}(T)$ e $\mathrm{Im}(T) \neq \mathrm{Ker}(S)$.
(3.2) Verificare che i vettori

$$\underline{v}_1 = \underline{e}_1 + 2\underline{e}_2 + \underline{e}_3, \quad \underline{v}_2 = 2\underline{e}_1 + \underline{e}_2 - \underline{e}_3$$

costituiscono una base di $\mathrm{Im}\,T$.

Esercizio 4. Sia V lo spazio vettoriale $\mathbb{R}^3$ con base canonica $\{\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3\}$ fissata e coordinate (x_1, x_2, x_3). Sia P l'applicazione lineare $P : V \longrightarrow V$ definita da

$$(1) \qquad P\underline{e}_1 = 2\underline{g}_1 - 2\underline{g}_3\,, \qquad P\underline{e}_2 = \underline{g}_2 + \underline{g}_3\,, \qquad P\underline{e}_3 = \underline{g}_1 + \underline{g}_2 + \underline{g}_3\,,$$

con $\{\underline{g}_1 = (2,0,1)\,, \underline{g}_2 = (1,3,0)\,, \underline{g}_3 = (0,1,2)\}$. È subito visto che questi 3 vettori costituiscono una base di $\mathbb{R}^3$. Determinare la matrice associata a P in questa base (quindi, base di partenza = base di arrivo = base $\{\underline{g}_1, \underline{g}_2\, \underline{g}_3\}$).

Esercizio 5. Spazio vettoriale $\mathbb{R}^4$ con base canonica fissata e coordinate (x_1, x_2, x_3, x_4). Sia $T : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ l'operatore lineare definito dalla matrice

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \end{vmatrix}$$

(5.1) Verificare che i vettori

$$\underline{v}_1 = (1,1,-1,1) \qquad \underline{v}_2 = (1,-1,1,1)$$

costituiscono una base per il sottospazio $\mathrm{Im}\,T$.
(5.2) Scrivere equazioni cartesiane del sottospazio $\mathrm{Im}\,T$.

Esercizio 6. Fare l'esercizio 4 del compito a casa del 15/12/00

Esercizio 7. (Continua l'Esercizio 4 del 15/12/00.)
Sia V lo spazio vettoriale $\mathbb{R}^3$. Sia π un sottospazio vettoriale di dimensione 2, cioè un piano, ed r una retta non contenuta in π. Si ha $V = r \oplus \pi$. Abbiamo definito 4 applicazioni lineari : P_1, P_2, S_1, S_2. Verificare che sussistono le seguenti identità:

$$(P_1)^2 = P_1\,; \quad (P_2)^2 = P_2\,; \quad P_2 = \mathrm{Id} - P_1\,; \quad S_1 = \mathrm{Id} - 2P_2\,; \quad S_2 = 2P_2 - \mathrm{Id}\,.$$

È bene ricordare che se $T : V \to V$ è un'applicazione lineare allora T^2 è per definizione l'applicazione $T \circ T$ (che è ancora lineare, come subito si verifica) . In queste formule Id è l'applicazione identica, che manda $\underline{v}$ in $\underline{v}$.
Suggerimento: dire che due applicazioni $S, T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ sono uguali vuol dire che $S(\underline{w}) = T(\underline{w}) \quad \forall \underline{w} \in \mathbb{R}^3$. Nel primo caso si tratta di dimostare che $\forall \underline{v} \in \mathbb{R}^3$ si ha $P_1(P_1(\underline{v})) = P_1(\underline{v})$...Fate una figura per aiutarvi.

Esercizio 8. Sia V lo spazio vettoriale $\mathbb{R}^3$ con base canonica $\{\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3\}$ fissata e coordinate (x_1, x_2, x_3). Scrivere la matrice associata nella base canonica alla proiezione P_2 sul piano π di equazione $-x_1 + x_2 + x_3 = 0$ parallelamente alla retta $r = \mathbb{R}(1, 2, 1)$. Fare lo stesso esercizio per le simmetrie S_1 e S_2.
Suggerimento: c'è una base $\{\underline{g}_1, \underline{g}_2, \underline{g}_3\}$ di $\mathbb{R}^3$ per cui la matrice associata a P_2 è estremamente facile a scriversi. Qual è questa base ? Una volta scritta la matrice associata a P_2 in questa "base speciale", l'esercizio può essere completato utilizzando le formule viste a lezione il 19/12/00.

Fare gli esercizi 1,2 pag 153. 1,2,3,4,5 pag 161-162. Ripassare il programma svolto, facendo o rifacendo esercizi.

Preparare l'esame durante le vacanze !