Algebra Lineare. Gruppo I-Z. Prof. P. Piazza

Compito per il periodo 20/12/02 - 8/1/03.

Contiene:

- Annunci vari.
- Esercizi sul prodotto scalare e vettoriale in $\mathcal{V}_O$.
- Esercizi di geometria euclidea.
- Esercizi di ripasso e di preparazione all'esonero.

Annunci vari.

1. Soluzioni per questi esercizi e per quelli assegnati per casa il 18/12/02 saranno disponibili in portineria oppure sulla pagina web
`http://www.mat.uniroma1.it/people/piazza/alglin02-03.htm`
il giorno 27/12/02, dopo le 13 [1]
2. Il giorno 7/1/03 alle ore 11 sarò in Aula II per spiegazioni, esercizi, ripasso. Ci sarò anche nel pomeriggio, qualora ce ne fosse bisogno.
3. Il giorno 8/1/03 alle ore 14.30 in Aula III ci sarà il secondo esonero.
4. I risultati di questo esonero, con elenco degli esonerati, saranno disponibili il giorno 10/1/03, alle ore 14.30 (in aula da definire, consultate quel giorno l'elenco delle aule di fronte alla portineria).
5. Il giorno 14/1/03 alle ore 10 in Aula III si svolgerà il primo esame scritto. Gli orali inizieranno, per tutti, il giorno 15/1/03 alle ore 10.

Esercizi sul prodotto scalare e vettoriale in $\mathcal{V}_O$.

Consideriamo $\mathcal{V}_O$ e fissiamo una base *ortonormale* $\{\underline{i}, \underline{j}, \underline{k}\}$ con coordinate associate (x, y, z). Poniamo per brevità $V = \mathcal{V}_O$.
I sottospazi vettoriali di dimensione 1 (risp. di dimensione 2) di $\mathcal{V}_O$ sono anche detti *rette vettoriali* (risp. *piani vettoriali*).

Esercizio 1.
(i) Determinare le coordinate dei vettori $\underline{v} \in V$ che sono complanari a $\underline{f} = (1, -2, 0)$ e $\underline{g} = (2, 0, 1)$, hanno lunghezza uguale a $\sqrt{6}$ e sono ortogonali a $(3, -1, -1)$.
(ii) Detto $\underline{v}_1$ il vettore determinato in (i) che forma un angolo ottuso con $\underline{j}$, determinare le coordinate del vettore proiezione ortogonale di $\underline{v}_1$ su $\mathbb{R}\underline{f}$.

Esercizio 2. Avete visto l'operazione di prodotto vettoriale di due vettori. In questo esercizio dovete utilizzare quello che avete imparato sul prodotto vettoriale ma anche molte delle nozioni viste durante questo corso di algebra lineare.

Sia $\underline{u}$ il vettore di coordinate $(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$:

$$\underline{u} = \frac{1}{\sqrt{3}}\,\underline{i} + \frac{1}{\sqrt{3}}\,\underline{j} + \frac{1}{\sqrt{3}}\,\underline{k}.$$

(2.1) Determinare l'equazione cartesiana del del sottospazio costituito dai vettori di $\mathcal{V}_O$ che sono ortogonali a $\underline{u}$.[2]

[1] attenzione, il dipartimento chiude alle 15.00.

[2] Brevemente: determinare l'equazione cartesiana del piano vettoriale ortogonale a $\mathbb{R}\underline{u}$.

Si consideri l'applicazione $T : V \longrightarrow V$ che associa a $\underline{v}$ il vettore $\underline{u} \wedge \underline{v}$, con $\wedge$ uguale al prodotto vettoriale:

$$T\underline{v} = (\frac{1}{\sqrt{3}}\underline{i} + \frac{1}{\sqrt{3}}\underline{j} + \frac{1}{\sqrt{3}}\underline{k}) \wedge \underline{v}.$$

Dalle proprietà del prodotto vettoriale sappiamo che T è lineare.

(2.1bis) Perché possiamo affermare, senza fare i conti, che $\dim \mathrm{Ker} T \geq 1$? Perché possiamo affermare, senza fare i conti che $\dim \mathrm{Im}\, T \geq 2$? (Suggerimento per la seconda domanda: prendere due vettori fra loro ortogonali nel piano vettoriale ortogonale a $\underline{u} = \frac{1}{\sqrt{3}}\underline{i} + \frac{1}{\sqrt{3}}\underline{j} + \frac{1}{\sqrt{3}}\underline{k}$.) Sulla base di questi ragionamenti, possiamo affermare che $\dim \mathrm{Ker} T = 1$ e $\dim \mathrm{Im}\, T = 2$?

(2.2) Scrivere la matrice associata a T nella base fissata $\{\underline{i}, \underline{j}, \underline{k}\}$.

(2.3) Scrivere equazioni cartesiane per il nucleo $\mathrm{Ker}(T)$ e per per l'immagine $\mathrm{Im}\, T$. Dare una base per questi sottospazi. (Potete procedere analiticamente, utilizzando (2.2), oppure geometricamente come in (2.1bis).)

(2.4) (Facoltativo) Determinare l'immagine tramite T della retta di equazioni cartesiane

$$\begin{cases} x - z = 0 \\ y + 2z = 0 \end{cases}$$

Verificare che il piano π di equazione cartesiana $2x + 2y - 3z = 0$ ha immagine tramite T uguale ad un piano e si determini l'equazione cartesiana di tale piano. Verificate poi che il piano σ di equazione cartesiana $2x + y - 3z = 0$ ha invece immagine tramite T uguale ad una retta. Come si spiega questa differenza?

Esercizio 3. Sia $V = \mathcal{V}'_O$ il piano vettoriale euclideo. Determinare le equazioni cartesiane della retta vettoriale ortogonale alla retta vettoriale di equazione cartesiana

$$x + 2y = 0\,.$$

Esercizio 4. Determinare l'equazione cartesiana del piano vettoriale π ortogonale alla retta vettoriale r di equazioni cartesiane

$$\begin{cases} x - y + z = 0 \\ x - y - z = 0 \end{cases} .$$

Determinare una base ortonormale di $\mathcal{V}_O$, $\underline{f} = \{\underline{f}_1, \underline{f}_2, \underline{f}_3\}$, con $\underline{f}_1 \in r$ e $\underline{f}_2, \underline{f}_3 \in \pi$.

Esercizio 5. Rifare l'esercizio 5 del 18/12/02 [3] utilizzando il prodotto vettoriale.

Esercizi di geometria euclidea.

Esercizio 6. Sia $RC(O, \underline{i}, \underline{j}, \underline{k})$ un riferimento cartesiano ortonormale nello spazio euclideo con coordinate associate (x, y, z). Determinare l'equazione cartesiana del piano π passante per la retta s di equazioni parametriche

$$\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2t \\ z = -1 - 2t \end{cases}$$

[3] Determinare le coordinate dei vettori $\underline{v}$ che hanno lunghezza uguale a 2 e sono ortogonali sia a $\underline{f} = (1, -1, 2)$ che a $\underline{g} = (0, 1, -1)$.

ed ortogonale al piano σ di equazione $x - y - z = 3$. Suggerimento: imporre che due piani siano ortogonali equivale ad imporre che le 2 rette perpendicolari ai piani siano ortogonali.

Esercizio 7. Sia $RC(O, \underline{i}, \underline{j}, \underline{k})$ un riferimento cartesiano ortonormale nello spazio euclideo con coordinate associate (x, y, z). Si dia un'equazione cartesiana del piano che contiene il punto $P(1, 2, 3)$ ed è perpendicolare alla retta r definita dalle equazioni cartesiane

$$\begin{cases} x + y - z - 1 = 0 \\ 2x + y + 3z + 1 = 0. \end{cases}$$

Esercizi di ripasso e di preparazione all'esonero.

Esercizio 8. Sia $RA(O, \underline{i}, \underline{j}, \underline{k})$ un riferimento affine in $\mathcal{A}^3$ con coordinate associate (x, y, z). Determinare equazioni parametriche per la retta r passante per il punto $P(1, 1, 2)$, parallela al piano π di equazione cartesiana

$$x + 2y + z = 3$$

e incidente la retta s di equazioni parametriche

$$\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2t \\ z = -1 - 2t \end{cases}$$

Esercizio 9. Sia $\mathcal{V}_O$ lo spazio vettoriale dei vettori geometrici con base ortonormale $\{\underline{i}, \underline{j}, \underline{k}\}$ fissata e sia $\underline{w} = \underline{i} - \underline{j} + 2\underline{k}$. Consideriamo l'applicazione lineare $F : \mathcal{V}_O \to \mathcal{V}_O$ definita da $F(\underline{v}) = \underline{w} \wedge \underline{v}$.

9.1. Determinare la matrice associata a F nella base fissata.

9.2. Determinare gli autovalori di F.

9.3. Stabilire se F è diagonalizzabile. Giustificare la risposta.

Esercizio 10. Sia $\{\underline{i}, \underline{j}, \underline{k}\}$ una base ortonormale in $\mathcal{V}_O$. Si applichi il procedimento di ortogonalizzazione di Gram-Schmidt alla base $\{\underline{u}_1, \underline{u}_2, \underline{u}_3\}$, dove

$$\underline{u}_1 = \underline{i} + 2\underline{j} + 2\underline{k}, \quad \underline{u}_2 = 3\underline{i} + 3\underline{j}, \quad \underline{u}_3 = 2\underline{i} - 2\underline{j} + \underline{k}.$$

Esercizio 11. Giustificando le risposte, stabilire se le seguenti affermazioni sono vere o false:

1. $\det(-A) = -\det A, \quad \forall A \in M_{nn}(\mathbb{R})$
2. $\det(A + B) = \det(A) + \det(B), \quad \forall A, B \in M_{nn}(\mathbb{R})$.
3. $\det(AB) = \det(BA), \quad \forall A, B \in M_{nn}(\mathbb{R})$.
4. $P_A(\lambda) = P_{-A}(\lambda), \quad \forall A \in M_{nn}(\mathbb{R})$.
5. Ogni matrice ortogonale è diagonalizzabile.

Esercizio 12. Sia $RA(O, \underline{i}, \underline{j}, \underline{k})$ un riferimento affine in $\mathcal{A}^3$ con coordinate associate (x, y, z). Si verifichi che esiste un solo piano contenente i tre punti

$$P_1(1, 2, 0), \quad P_2(1, 1, 1), \quad P_3(2, -1, -3).$$

e se ne dia un'equazione cartesiana.

Esercizio 13. Sia $V = \mathbb{R}^3$ e sia $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'operatore lineare definito da

$$F(1, 1, 0) = (-1, 3, 0), \quad F(0, 1, 0) = (0, 1, 0), \quad F(0, 1, 1) = (2, -1, 1)$$

13.1. Spiegare perché F è ben definito da queste relazioni.

13.2. Verificare che la matrice associata ad F nella base canonica di $\mathbb{R}^3$ è

$$A = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

13.3. Stabilire se F è diagonalizzabile ed in caso affermativo trovare una base di autovettori e la matrice associata ad F in questa base.
13.4. Studiare l'iniettività e la suriettività di F.

PREPARARE L'ESAME DURANTE LE VACANZE DI NATALE !

Se vi avanza tempo, fate i seguenti esercizi sul libro:
1, 2, 3, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12 pag 117/118.
1,3,6,7,10 pag 185/6