Geometria 1. I^0 Modulo. a.a. 00/01. Gruppo E-N
Esercizi per casa del 15/12/00

Esercizio 1. $V = \mathbb{R}^3$ con base canonica $\underline{e}_1 = (1,0,0)$, $\underline{e}_2 = (0,1,0)$, $\underline{e}_3 = (0,0,1)$. Spiegare perché esiste ed è unica l'applicazione lineare $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tale che

$$F(1,1,1) = (2,3,2), \quad F(0,1,1) = (1,3,2), \quad F(0,1,-1) = (1,1,-2).$$

Determinare la matrice associata ad F nella base canonica (quindi base di partenza e base di arrivo uguali alla base canonica).

Esercizio 2 . Determinare l'espressione in coordinate di *un*'applicazione lineare $F : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ che trasformi il vettore $(1,1) \in \mathbb{R}^2$ nel vettore $(1,1,1) \in \mathbb{R}^3$ ed abbia nucleo banale (quindi *iniettiva*). Determinare equazioni parametriche e cartesiane per il sottospazio immagine della vostra F. (La risposta *non* è, ovviamente, unica). Rifate questo esercizio imponendo sempre che F trasformi $(1,1)$ in $(1,1,1)$ ma richiedendo ora che il nucleo sia non banale. Fate delle figure che illustrino le vostre costruzioni.

Esercizio 3. Sia V lo spazio vettoriale $\mathbb{R}^3$ con base canonica $\{\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3\}$ fissata e coordinate (x_1, x_2, x_3). Sappiamo che $\exists$ *unica* l'applicazione lineare $P : V \longrightarrow V$ tale che

$$P\underline{e}_1 = 2\underline{g}_1 - 2\underline{g}_3\,, \qquad P\underline{e}_2 = \underline{g}_2 + \underline{g}_3\,, \qquad P\underline{e}_3 = \underline{g}_1 + \underline{g}_2 + \underline{g}_3\,,$$

con $\{\underline{g}_1 = (2,0,1)\,, \underline{g}_2 = (1,3,0)\,, \underline{g}_3 = (0,1,2)\}$. Determinare la matrice associata a P nella base canonica (base di partenza = base di arrivo = base canonica). Si verifichi ora che $\{\underline{g}_1, \underline{g}_2, \underline{g}_3\}$ è una base di $\mathbb{R}^3$. Determinare la matrice associata a P con base di partenza la base canonica e base di arrivo la base $\{\underline{g}_1, \underline{g}_2, \underline{g}_3\}$. Determinare l'immagine del vettore $\underline{u} = 2\underline{e}_1 + 3\underline{e}_2 + 2\underline{e}_3$ tramite P.

Esercizio 4. (Facoltativo). Sia V lo spazio vettoriale $\mathbb{R}^3$. Sia π un sottospazio vettoriale di dimensione 2, cioè un piano, ed r una retta non contenuta in π. Sappiamo che ogni vettore $\underline{w}$ di $\mathbb{R}^3$ si scrive in maniera unica come $\underline{w} = \underline{w}_1 + \underline{w}_2$ con $\underline{w}_1 \in r$ e $\underline{w}_2 \in \pi$. Equivalentemente: $V = r \oplus \pi$.
Definiamo un'applicazione $P_1 : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ associando a $\underline{w} \in \mathbb{R}^3$ il vettore $\underline{w}_1 \in \mathbb{R}^3$: quindi $P_1(\underline{w}) = \underline{w}_1$ per definizione.
4.1 Verificare che l'applicazione P_1 è *lineare*. Essa è, per definizione, la proiezione su r parallelamente a π.

La legge $\underline{w} \longrightarrow \underline{w}_2$ definisce la proiezione su π parallelamente a r; questa è anche un'applicazione lineare ed è denotata tramite P_2. Quindi $P_2 : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $P_2(\underline{w}) = \underline{w}_2$.
Abbiamo altre due applicazione *lineari* definite dalla decomposizione $\mathbb{R}^3 = \pi \oplus r$. La simmetria S_1 rispetto a r parallelamente a π e la simmetria S_2 rispetto a π parallelamente a r:

$$S_1(\underline{w}) = \underline{w}_1 - \underline{w}_2 \qquad S_2(\underline{w}) = \underline{w}_2 - \underline{w}_1.$$

4.2 Disegnate π, r ed un generico $\underline{w} \in \mathbb{R}^3$ con $\underline{w} \notin r$, $\underline{w} \notin \pi$; sul disegno indicate $P_1(\underline{w})$, $P_2(\underline{w})$, $S_1(\underline{w})$, $S_2(\underline{w})$.
4.3. Determinare l'immagine ed il nucleo di P_1 e P_2. Spiegare perché S_1 e S_2 sono biunivoche.

Esercizio 5. (Facoltativo) Siano V, W, Z spazi vettoriali e $T : V \longrightarrow W$, $S : W \longrightarrow Z$ due applicazioni lineari. Verificare che se T è non-iniettiva allora la composizione $S \circ T$ è non-iniettiva *per ogni* $S : W \to Z$ (questo è molto facile da verificare). Supponiamo ora che S sia non-iniettiva: è vero che $S \circ T$ è non-iniettiva *per ogni* $T : V \to W$? La risposta è *no.* Elaborate una spiegazione e fornite un esplicito controesempio. Cercate di ragionare geometricamente utilizzando il sottospazio nucleo; provate con $V = \mathbb{R}^2$, $W = Z = \mathbb{R}^3$, S una proiezione su un piano parallelamente ad una retta (non è iniettiva), T l'applicazione iniettiva che avete costruito nell'Esercizio 2... Fate delle figure.