Algebra Lineare. Gruppo I-Z. Prof. P. Piazza

Compito per il fine settimana del 14/15 Dicembre 2002 + Complementi.

Riassunto della lezione del 13/12/2002 Riassumiamo velocemente quanto visto sullo spazio affine. Il nostro punto di partenza è stato lo *spazio ordinario* e le sue proprietà elementari. In una prima approssimazione possiamo pensare allo spazio ordinario come allo spazio fisico circostante. Le sue proprietà elementari nascono dall'esperienza: i concetti geometrici di punto, retta, piano, la loro mutua posizione etc... nascono da nozioni concrete tratte dalla considerazione dello spazio fisico. Da un punto di vista matematico queste proprietà elementari, (ad esempio "per due punti passa una ed una sola retta") non possono essere *dimostrate* a partire sulla base dell'esperienza fisica. Il primo a capire questa difficoltà fu Euclide il quale estrasse alcuni *assiomi* (o *postulati*) fondamentali sui quali fondare rigorosamente la geometria. Gli assiomi, insieme alle proprietà che da essi si possono dedurre, formano il complesso della *Geometria Euclidea*, che è quella che si studia alla scuola media e al liceo. Seguendo la trattazione data da David Hilbert nel suo celebre "Fondamenti della geometria", gli assiomi della geometria euclidea si possono riassumere in cinque gruppi

1. *Assiomi di appartenenza* (del tipo "per tre punti non-allineati passa uno ed un solo piano"...).
2. *Assiomi di ordine* (permettono di fissare un verso su una retta)
3. *Assiomi di congruenza* (danno la nozione di confronto ed uguaglianza fra segmenti e fra angoli).
4. *Assiomi di continuità* (quelli dei numeri reali).
5. *Assioma delle parellele.*

Lo spazio è quindi un insieme i cui elementi sono detti punti e nel quale sono dati alcuni sottoinsiemi (rette, piani, segmenti...) verificanti questi 5 gruppi di assiomi. A priori ci possono essere varie geometrie euclidee: Hilbert dimostra che due geometrie euclidee differenti sono di fatto equivalenti e possono essere assimilate. Esiste quindi una sola geometria euclidea che è proprio quella che era nella testa di Euclide verso il 300 A.C.

Passiamo alla geometria affine. Concentriamoci per un momento sugli assiomi del *terzo* gruppo, gli assiomi di congruenza. Fra questi assiomi di congruenza ci sono quelli che fanno intevenire la nozione di uguaglianza e confronto di segmenti che si trovano su una stessa retta oppure su rette parallele. Una nozione o una proprietà dello spazio è detta *affine* se, insieme agli assiomi 1, 2, 4, 5, fa intevenire soltanto gli assiomi di congruenza appena citati; *non* fa quindi intevenire gli assiomi di congruenza che stabiliscono il confronto e l'uguaglianza fra segmenti appartenenti a rette *non-paralle* ; non fa neppure intervenire la nozioni di confronto ed uguaglianza fra angoli. Essere un triangolo isoscele, ad esempio, non è una proprietà affine. La nozione di parallelogramma è, invece, affine. Tutte le proprietà dedotte per mezzo dei vettori di $\mathcal{V}_O$ sono affini. Le proprietà di incidenza e parallelismo sono affini. Si noti che il teorema di Pitagora non ha senso nella geometria affine (non possiamo confrontare le lunghezze dei lati di un triangolo perché le rette sui quali giacciono non sono parallele, né possiamo dare un senso alla nozione di triangolo rettangolo, non potendo misurare gli angoli).

Lo spazio ordinario insieme agli assiomi 1,2,4,5 e agli assiomi di congruenza "ridotti" appena citati è detto *spazio affine*[1] La geometria affine è lo studio delle proprietà delle figure che si possono dedurre dagli assiomi. Per lo spazio affine si usa a volte la notazione $\mathcal{A}^3$ (invece di $\mathcal{E}^3$, che si utilizza per lo spazio euclideo).

Fissiamo un punto O nello spazio. Esiste allora una corrispondenza biunivoca di insiemi:

$$\mathcal{A}^3 \leftrightarrow \mathcal{V}_O$$

che associa al **punto** $P \in \mathcal{A}^3$ il **vettore** $\underline{OP} \in \mathcal{V}_O$. In particolare il punto O è trasformato nel vettore nullo di $\mathcal{V}_O$.
Questa corrispondenza biunivoca trasforma quindi i punti dello spazio, nei vettori di $\mathcal{V}_O$; le rette dello spazio, nelle sottovarietà affini di dimensione 1 di $\mathcal{V}_O$; i piani dello spazio, nelle sottovarietà affini di dimensione 2 di $\mathcal{V}_O$. Inoltre trasforma le rette (rispettiv. i piani) passanti per il punto O, nei sottospazi di dimensione 1 (rispettiv. 2) di $\mathcal{V}_O$.

In altre parole, studiare le proprietà geometriche di punti, rette e piani in $\mathcal{A}^3$ è equivalente a studiare le proprietà geometriche delle sottovarietà affini di $\mathcal{V}_O$.

Fissiamo ora una base $\underline{i}$, $\underline{j}$, $\underline{k}$ per la spazio vettoriale $\mathcal{V}_O$. Rimangono allora determinate le coordinate di ogni vettore di $\mathcal{V}_O$ rispetto a questa base. Le coordinate fissano un isomorfismo di spazi vettoriali $\mathcal{V}_O \leftrightarrow \mathbb{R}^3$ che associa a $\underline{v} \in \mathcal{V}_O$ le coordinate (x, y, z) di $\underline{v}$ rispetto alla fissata base $\underline{i}$, $\underline{j}$, $\underline{k}$. Questo isomorfismo trasforma sottovarietà affini di $\mathcal{V}_O$ in sottovarietà affini di $\mathbb{R}^3$. Mettendo insieme le due corrispondenze biunivoche

$$\mathcal{A}^3 \leftrightarrow \mathcal{V}_O \leftrightarrow \mathbb{R}^3$$

vediamo che esiste una corrispondenza biunivoca $\mathcal{A}^3 \leftrightarrow \mathbb{R}^3$ che associa ad ogni punto P le coordinate di $\underline{OP}$ rispetto a $\underline{i}$, $\underline{j}$, $\underline{k}$ e *che trasforma punti, rette e piani di $\mathcal{A}^3$ in sottovarietà affini di $\mathbb{R}^3$ di dimensione rispettivamente 0,1,2.*
Inoltre le rette (rispet. i piani) di $\mathcal{A}^3$ passanti per il punto O sono trasformati in sottospazi di $\mathbb{R}^3$ di dimensione 1 (rispet. 2).

Le coordinate dipendono dalla scelta di O e dalla scelta della base $\underline{i}$, $\underline{j}$, $\underline{k}$. Si dice allora che è stato fissato un riferimento affine $RA(O, \underline{i}, \underline{j}\, \underline{k})$ con coordinate (x, y, z). Si usa anche la notazione $RA(O, x, y, z)$.

Conclusione: possiamo studiare i punti, le rette e i piani dello spazio affine studiando le sottovarietà affini di $\mathbb{R}^3$.

A questo punto rivedete le equazioni cartesiane e parametriche delle sottovarietà affini di $\mathbb{R}^3$...

Riassumiamo quanto abbiamo visto circa la mutua posizione di rette e piani. Sulla base della vostra esperienza sui sistemi lineari dovreste riuscire a ricavare nuovamente da soli molte delle proprietà che seguono. Tenete presente che il teorema di compatibiltà pag 42 (Proposizione 5.15.) può anche rienunciarsi come segue :

[1] di nuovo, qui dovremmo dire: un insieme di punti verificante 1,2,3,5 e gli assiomi di congruenza ridotti è uno spazio affine....

$A\underline{x} = \underline{b}$ *è compatibile se e solo se* $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(A|\underline{b})$.
Questo enunciato appena scritto è noto come **teorema di Rouché-Capelli** [2]

Proposizione 1. *Due piani* π, π' *di equazione cartesiana*

$$Ax + By + Cz + D = 0\,, \qquad A'x + B'y + C'z + D' = 0$$

sono paralleli se e soltanto se i coefficienti di giacitura sono proporzionali e cioè sse

$$rg \begin{vmatrix} A & B & C \\ A' & B' & C' \end{vmatrix} = 1.$$

Il rango è invece uguale a due se e solo se $\pi \cap \pi' = r$, *con* r *una retta.*
Se π *e* π' *sono paralleli allora* $\pi = \pi'$ *oppure* $\pi \cap \pi' = \emptyset$ *a seconda che sia rispettivamente*

$$rg \begin{vmatrix} A & B & C & D \\ A' & B' & C' & D' \end{vmatrix} = 1\,, \qquad rg \begin{vmatrix} A & B & C & D \\ A' & B' & C' & D' \end{vmatrix} = 2\,.$$

Proposizione 2. *Sia* $r = \pi \cap \pi'$ *una retta e sia* σ *il piano di eq. cartesiana* $\alpha x + \beta y + \gamma z + \delta = 0$. *Sia* $W = \mathbb{R}(l, m, n)$ *la direzione di* r. *Allora* r *è parallela a* σ *se e soltanto se*

$$\alpha l + \beta m + \gamma n = 0\,.$$

Equivalentemente, se r *è data in forma cartesiana abbiamo che* r *è parallela a* σ *sse*

$$rg \begin{vmatrix} A & B & C \\ A' & B' & C' \\ \alpha & \beta & \gamma \end{vmatrix} = 2$$

e cioè se e soltanto se il determinante di questa matrice 3×3 *è* $= 0$.
Se r *e* σ *sono paralleli allora* $r \subset \sigma$ *o* $r \cap \sigma = \emptyset$ *a seconda che sia rispettivamente*

$$rg \begin{vmatrix} A & B & C & D \\ A' & B' & C' & D' \\ \alpha & \beta & \gamma & \delta \end{vmatrix} = 2 \qquad rg \begin{vmatrix} A & B & C & D \\ A' & B' & C' & D' \\ \alpha & \beta & \gamma & \delta \end{vmatrix} = 3.$$

Si ha invece che $r \cap \sigma = P$, *un punto, se e soltanto se*

$$rg \begin{vmatrix} A & B & C \\ A' & B' & C' \\ \alpha & \beta & \gamma \end{vmatrix} = 3$$

(e cioè il determinante è diverso da zero).

[2] Il fatto che il teorema di Rouché-Capelli (pronuncia *euscé*) sia equivalente alla Proposizione 5.15 pag 42 segue dall'osservazione che il rango di una matrice $m \times n$ è la dimensione del sottospazio di $\mathbb{R}^m$ generato dalle colonne di tale matrice.

Esercizi sul piano affine. Consideriamo il piano affine $\mathcal{A}^2$ e sia $RA(O, \underline{i}, \underline{j})$ un riferimento affine. Denotiamo con (x, y) le coordinate associate.
Supponiamo che il riferimento sia quello disegnato qui sotto:

Esercizio 1. Sia r la retta di equazione cartesiana $2x - y + 2 = 0$. Determinare i parametri direttori di r. Determinare un'equazione parametrica per r. Disegnare r nel riferimento assegnato.
Disegnare le seguenti rette:
r_2 di equazione cartesiana $x = 3$.
r_3 di equazione cartesiana $y = -1$.
r_4 di equazioni parametriche $x = 1 + 2t$, $y = -1 - 2t$.

Esercizio 2. Dire se le 3 rette di equazione cartesiana

$$3x + 3y - 1 = 0 \qquad 2x + y + 2 = 0 \qquad x - y + 2 = 0$$

sono incidenti in un punto.

Esercizio 3. Determinare l'equazione cartesiana della retta r passante per l'intersezione delle due rette

$$2x - y + 3 = 0 \qquad x + y + 1 = 0$$

e per il punto P_0 di coordinate $(0, 1)$.

Esercizi sullo spazio affine. Passiamo allo spazio affine $\mathcal{A}^3$ con riferimento $RA(O, \underline{i}, \underline{j}, \underline{k})$ e coordinate associate (x, y, z)

Esercizio 4.
4.1 Determinare le equazioni parametriche e cartesiane del piano π per i punti $P_1 = (1, 0, 0)$, $P_2 = (0, 1, 0)$ e $P_3 = (0, 0, 1)$.
4.2 Determinare due vettori di giacitura $\underline{v}$, $\underline{v}'$ per π.
4.3 Determinare l'equazione cartesiana del piano σ parallelo al piano π e passante per il punto $P = (16, 1, 0)$.

Esercizio 5. Determinare l'equazione cartesiana del piano parallelo al piano coordinato yz e passante per $P = (2, 3, 1)$. (Il piano coordinato yz è il piano per l'origine individuato dall'asse y e dall'asse z e cioè dalla giacitura $W = \text{Span}(\underline{j}, \underline{k})$.)

Esercizio 6. Disegnare nel seguente riferimento

- il piano di equazione cartesiana $x+y-1=0$.
- il piano di equazione cartesiana $z=3$
- la retta di equazione cartesiana $x=1$ $y=2$
- la retta di equazioni parametriche $x=t$, $y=t$, $z=1$.

Esercizio 7. È data la retta r di equazioni parametriche

$$\begin{cases} x = 2t+1 \\ y = -t-2 \\ z = t+3 \end{cases}$$

Determinare i parametri direttori di r. Scrivere equazioni cartesiane per r. Dire se queste equazioni sono univocamente determinate.

Esercizio 8. Determinare i parametri direttori della retta r

$$\begin{cases} 2x+y-3z=2 \\ x-y+z=1 \end{cases}$$

Scrivere le equazioni cartesiane della rette s parallela a r e passante per $P=(0,1,1)$.

Esercizio 9. Scrivere l'equazione cartesiana del piano per il punto $(0,2,0)$ e per la retta di equazione cartesiana

$$\begin{cases} x-z=3 \\ y+2z=1 \end{cases}$$

Esercizio 10. Scrivere equazioni ridotte per la retta r dell'Esercizio 8. Scrivere l'equazione del piano per tale retta e parallelo al sottospazio $W=\mathbb{R}(11,0,-1)$.

Esercizio 11 Determinare l'equazione cartesiana per il piano π che contiene il punto $(3,2,1)$ e la retta di equazioni parametriche $x=2+3t$, $y=4+t$, $z=1+5t$.

Esercizio 12. Determinare equazioni cartesiane per la retta passante per $Q=(-1,-1,-1)$, contenuta nel piano π di equazioni $x+y+z+3=0$ e complanare alla retta s di equazioni

$$\begin{cases} x-2z+4=0 \\ 2y-z=0 \end{cases}$$

Esercizio 13. Determinare le equazioni cartesiane della retta r passante per $(4,1,0)$ e complanare alle rette sghembe s e t di equazioni rispettivamente

$$\begin{cases} x+2z-1=0 \\ y-z-3=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x-z-2=0 \\ y+z=0 \end{cases} ,.$$

Esercizio 13bis. Determinare la retta r per il punto $Q_0=(1,-1,-1)$ e complanare alle rette s ed t di equazione

$$\begin{cases} 2x+2y+1=0 \\ -2x+3y+z=0 \end{cases} , \qquad \begin{cases} y=2 \\ z=1 \end{cases} .$$

Esercizio 14. Determinare l'equazione del piano per $Q_0=(1,2,-1)$ e parallelo alle rette r ed s di equazioni

$$\begin{cases} x+y-z=0 \\ x+3z=1 \end{cases} , \qquad \begin{cases} x=-1+t \\ y=t \\ z=3+4t \end{cases}$$

Complementi.

Proposizione 3. *Sono date due rette r e ρ dello spazio affine $\mathcal{A}^3$ di equazione rispettivamente*

$$\begin{cases} ax+by+cz+d=0 \\ a'x+b'y+c'z+d'=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \alpha x+\beta y+\gamma z+\delta=0 \\ \alpha' x+\beta' y+\gamma' z+\delta'=0 \end{cases} .$$

r e ρ sono complanari se e soltanto se la matrice

$$\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ a' & b' & c' & d' \\ \alpha & \beta & \gamma & \delta \\ \alpha' & \beta' & \gamma' & \delta' \end{vmatrix}$$

ha determinante uguale a zero. Se r e ρ sono complanari allora

$$r=\rho, \qquad r\cap\rho=P, \qquad r//\rho$$

a seconda che si abbia rispettivamente

$$rg\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ a' & b' & c' & d' \\ \alpha & \beta & \gamma & \delta \\ \alpha' & \beta' & \gamma' & \delta' \end{vmatrix} = rg\begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha' & \beta' & \gamma' \end{vmatrix} = 2\ ,$$

$$rg\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ a' & b' & c' & d' \\ \alpha & \beta & \gamma & \delta \\ \alpha' & \beta' & \gamma' & \delta' \end{vmatrix} = rg\begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha' & \beta' & \gamma' \end{vmatrix} = 3\ ,$$

$$rg\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ a' & b' & c' & d' \\ \alpha & \beta & \gamma & \delta \\ \alpha' & \beta' & \gamma' & \delta' \end{vmatrix} = 3 \quad rg\begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha' & \beta' & \gamma' \end{vmatrix} = 2$$

Esercizio 15. Verificare che se r e ρ sono date in forma ridotta

$$\begin{cases} x=lz+p \\ y=mz+q \end{cases} \qquad \begin{cases} x=l'z+p' \\ y=m'z+q' \end{cases}$$

allora r è complanare a ρ sse la matrice

$$\begin{vmatrix} l-l' & p-p' \\ m-m' & q-q' \end{vmatrix}$$

ha determinante uguale a zero.

Esercizio 16. Determinare le equazioni cartesiane della retta $\widetilde{r}$ parallela alla retta r di equazioni

$$\begin{cases} x-2y-1=0 \\ y-z+2=0 \end{cases}$$

e complanare alle rette sghembe s e t di equazioni rispettivamente

$$\begin{cases} x+2z-1=0 \\ y-z-3=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x-z-2=0 \\ y+z=0 \end{cases}$$

Suggerimento: utilizzare il risultato dell'esercizio precedente.

Esercizio 17. Decidere se le due rette:

$$\begin{cases} x+1=0 \\ z-2=0 \end{cases}, \qquad \begin{cases} 2x+y-2z+6=0 \\ y+z-2=0 \end{cases}$$

sono complanari. In caso affermativo, stabilire se sono incidenti o parallele e determinare l'equazione del piano che le contiene.

Fine complementi.

SKETCH DELLE SOLUZIONI.

Soluzione esercizio 1. I parametri direttori di r sono le coordinate di un suo vettore direttore. Un vettore direttore è un generatore del sottospazio $2x-y=0$. Quindi $l=1, m=2$.
Per determinare l'equazione parametrica di r osserviamo che $P_0=(-1,0)$ è una soluzione dell'equazione di r; quindi $P_0=(-1,0)\in r$; ma allora abbiamo un punto di r ed i parametri direttori di r, ne segue che le eq. par. sono $x=-1+t, y=2t$. Altrimenti, risolviamo l'equazione. [3] In questo caso è tutto piuttosto banale: ponendo $y=t$ (variabile libera) e quindi $x=t/2-1$ da cui $x=t/2-1, y=t$ come prima.

Soluzione esercizio 2. Dire che le 3 rette sono incidenti in un punto vuol dire che l'intersezione delle 3 rette è non vuota e costituita da un punto. Basta allora verificare che il sistema 3×2 dato dalle 3 equazioni delle 3 rette ammette un'unica soluzione. Il rango della matrice dei coefficienti è chiaramente 2 (notare che questa è una matrice 3×2). Basta allora controllare che il rango della matrice completa è anche 2, cioè, ad esempio, che

$$\det\begin{vmatrix} 3 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix}=0.$$

Calcolando il determinante scopriamo che è diverso da zero; ne segue che le 3 rette non sono incidenti.
Si noti che potevamo anche ragionare come segue: le 3 rette sono incidenti se e solo se la terza appartiene al fascio definito dalle prime 2; per quanto visto a lezione questa condizione si riduce alla condizione che la terza equazione sia combinazione lineare delle prime due e cioè che il determinante sia uguale zero.

Soluzione esercizio 3. Le due rette non sono parallele, avendo i parametri direttori diversi. Ne segue che sono incidenti in un punto. Possiamo determinare l'intersezione P e poi scrivere la retta per 2 punti.
Oppure possiamo considerare il fascio di rette proprio determinato dalle due rette:

$$\lambda(2x-y+3)+\mu(x+y+1)=0\,, \quad (\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2\setminus(0,0)$$

Fra tutte queste rette (sono ∞^1) ne esiste una sola che passa per P_0. Per determinare quali λ e μ occorre scegliere basta imporre il passaggio per P_0: otteniamo l'equazione omogenea $\lambda(2)+\mu(2)=0$, che ha soluzione $t(1,-1)$. Possiamo quindi scegliere $\lambda=1$, $\mu=-1$ e risostituendo otteniamo $(2x-y+3)-(x+y+1)=0$, cioè $x-2y+2=0$.

[3] questo è il metodo generale che abbiamo visto per passare da equazioni cartesiane di una sottovarietà affine ad equazioni parametriche.

Soluzione esercizio 4.
4.1 Applicare meccanicamente la formula pag 128.
4.2 $\underline{v} = \underline{OP_2} - \underline{OP_1} = (-1, 1, 0)$, $\underline{v}' = \underline{OP_3} - \underline{OP_1} = (-1, 0, 1)$.
4.3 Prendere il fascio improprio definito dall'equazione di cui in 4.1 e imporre il passaggio per P.

Soluzione esercizio 5. Il piano coordinato yz ha equazioni $x = 0$. Il fascio di piani paralleli al piano coordinato yz ha equazione $x = d$, al variare di $d \in \mathbb{R}$. L'equazione cercata è allora $x = 2$.

Soluzione esercizio 7. Parametri direttori $l = 2, m = -1, n = 1$. Eq. cart.: possiamo ad esempio ricavare t dalla seconda equazione, $t = -y - 2$, e sostituirlo nella prima e terza equazione. Otteniamo

$$\begin{cases} x - 2(-y-2) - 1 = 0 \\ z - (-y-2) - 3 = 0 \end{cases} \quad \text{e cioè} \quad \begin{cases} x + 2y + 3 = 0 \\ y + z - 1 = 0 \end{cases}$$

Queste equazioni non sono univocamente determinate (una retta è l'intersezione di infinite coppie distinte di piani, pensate allo spigolo di un libro). Ovviamente, possiamo anche sfruttare il fatto che deve essere

$$\text{rg} \begin{vmatrix} x-1 & y+2 & z-3 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 1. \tag{1}$$

Ciò è equivalente a

$$\begin{cases} \det \begin{vmatrix} x-1 & y+2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 0 \\ \det \begin{vmatrix} x-1 & z-3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \end{cases}$$

e queste *sono* equazioni cartesiane (sviluppando il determinante). Possiamo anche considerare

$$\left|\begin{array}{c|c} 2 & x-1 \\ -1 & y+2 \\ 1 & z-3 \end{array}\right|$$

ridurre con Gauss-Jordan e imporre la compatibilità.

Soluzione esercizio 8. Basta risolvere esplicitamente il sistema omogeneo associato. Si può anche utilizzare la formula (2.17) del Cap 4. Le equazioni parametriche di s le scriviamo immediatamente e da quelle le equazioni cartesiane.

Soluzione esercizio 9. Basta considerare il fascio di piani per la retta data ed imporre il passaggio per il punto $(0, 2, 0)$. Il fascio di piani ha equazioni

$$\lambda(x - z - 3) + \mu(y + 2z - 1) = 0$$

al variare di (λ, μ) in $\mathbb{R}^2 \setminus (0, 0)$. Imponendo il passaggio per $(0, 2, 0)$ si ottiene $-3\lambda + \mu = 0$ che ha soluzione $\lambda = 1, \mu = 3$ a meno di un comune fattore di proporzionalità non nullo. Risostituendo questi valori nell'equazione qui sopra, scopriamo che il piano cercato ha quindi equazione $x + 3y + 5z - 6 = 0$.

Soluzione esercizio 10. Basta risolvere il sistema, scrivendo 2 delle 3 variabili in funzione di una variabile libera.
Per il piano: dalle equazioni cartesiane di r possiamo scrivere il fascio di piani per r; imponendo il parallelismo con W otteniamo un'equazione lineare omogenea in λ e μ e poi procediamo come nell'esercizio 9.

Soluzione esercizio 11. Notiamo che il punto non appartiene alla retta; il problema è quindi ben posto. Si può procedere in (almeno) due modi: si determinano 2 punti distinti sulla retta e si utilizza l'equazione del piano per 3 punti non allineati. Si può altrimenti scrivere l'equazione cartesiana della retta e procedere come nell'Es. 9.

Soluzione esercizio 12. La retta cercata è l'intersezione del piano π e del piano per Q e s. Quest'ultimo piano si ottiene come nell'Es. 9; mettendo poi a sistema con l'equazione cartesiana di π si ottengono le equazioni della retta cercata.

Soluzione esercizio 13. La retta si ottiene come intersezione di due piani σ e σ': σ è il piano per s e $(4,1,0)$; σ' è il piano per t e per $(4,1,0)$. Questi due piani si ottengono come nell'Es.9 ; mettendo a sistema le due equazioni ottenute si ottengono le equazioni cartesiane della retta cercata.

Soluzione esercizio 13bis. Concettualmente identica a quella dell'esercizio precedente.

Soluzione esercizio 14. I vettori direttori delle 2 rette sono 2 vettori di giacitura per il piano; abbiamo quindi un punto e due vettori di giacitura. L'equazione del piano è ora chiara da quanto visto a lezione.

Soluzione esercizio 15. Basta utilizzare la condizione di complanarità; per la proposizione r e ρ sono complanari sse

$$\det \begin{vmatrix} 1 & 0 & -l & -p \\ 0 & 1 & -m & -q \\ 1 & 0 & -l' & -p' \\ 0 & 1 & -m' & -q' \end{vmatrix} = 0.$$

Usando Gauss-Jordan segue la tesi.

Soluzione esercizio 16. r ha parametri direttori $(2,1,1)$; ne segue che $\widetilde{r}$ ha equazioni cartesiane (ridotte)

$$\begin{cases} x = 2z + p \\ y = z + q \end{cases}$$

Per determinare p e q imponiamo la complanarità con le rette s e t di equazioni rispettivamente

$$\begin{cases} x + 2z - 1 = 0 \\ y - z - 3 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x - z - 2 = 0 \\ y + z = 0 \end{cases} ;$$

utilizzando l'esercizio precedente si ottengono due equazioni lineari in p e q; risolvendo il relativo sistema si ottengono i due valori p e q cercati.

Soluzione esercizio 17. Le due rette sono complanari (applicare il criterio) e non parallele; sono quindi incidenti. Un piano che le contiene è $2x - 3z + 8 = 0$; questo piano è ottenuto, fissando un punto Q su una retta, ad esempio la seconda, e facendo passare per questo punto il generico piano per la prima retta. In formule: il generico piano per le prima retta è $\lambda(x+1) + \mu(z-2) = 0$. Un punto sulla seconda è : $(-5/2, 1, 1)$; quindi $\lambda = 2$ $\mu = -3$ e si ha l'equazione $2x - 3z + 8 = 0$.