Algebra Lineare. Gruppo I-Z. Prof. P. Piazza
Compito per il fine settimana del 9/10 Novembre 2002.

Esercizio 1. Sia $A \in M_{nm}(\mathbb{R})$.
1.1 Stabilire se la seguente proposizione è vera o falsa:
se $n > m$ l'applicazione lineare $F_A : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ non può essere iniettiva.
1.2. Stabilire se la seguente proposizione è vera o falsa:
se $n < m$ l'applicazione lineare $F_A : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ non può essere suriettiva.
Giustificate la vostra risposta.

Esercizio 2. Sia $A \in M_{nn}(\mathbb{R})$. Vero o Falso:

- *Se l'applicazione lineare $F_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ è iniettiva allora è anche suriettiva.*
- *Se l'applicazione lineare $F_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ è suriettiva allora è anche iniettiva.*

Giustificate la risposta.

Esercizio 3. Dire se l'applicazione lineare $F_A : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ definita dalla matrice

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix}$$

è iniettiva. Dire se è biettiva[1]. Determinare l'immagine tramite F_A del vettore $(1, 2, 1)$. Determinare l'immagine tramite F_A dei vettori della base canonica.

Esercizio 4. Sia $Q_A : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare definita dalla matrice

$$A = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & -3 \\ 0 & -2 & 5 \end{vmatrix}.$$

(4.0) Scrivere l'espressione di Q_A in coordinate.
(4.1) Determinate una base di $\mathrm{Ker}(Q_A)$; determinate equazioni per $\mathrm{Im}Q_A$. Studiare l'iniettività/suriettività di Q_A. Determinare la controimmagine del vettore $(2, -1, 5)$.

Esercizio 5. $V = \mathbb{R}^3$ con base canonica $\underline{e}_1 = (1, 0, 0)$, $\underline{e}_2 = (0, 1, 0)$, $\underline{e}_3 = (0, 0, 1)$. Spiegare perché esiste ed è unica l'applicazione lineare $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tale che

$$F(1, 1, 1) = (2, 3, 2), \quad F(0, 1, 1) = (1, 3, 2), \quad F(0, 1, -1) = (1, 1, -2).$$

Determinare la matrice associata ad F nella base canonica (quindi base di partenza e base di arrivo uguali alla base canonica).

Esercizio 6. Sia V lo spazio vettoriale $\mathbb{R}^3$ con base canonica $\{\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3\}$ fissata e coordinate (x_1, x_2, x_3). Spiegare perché $\exists$ *unica* l'applicazione lineare $P : V \longrightarrow V$ tale che

$$(1) \qquad P\underline{e}_1 = 2\underline{g}_1 - 2\underline{g}_3\,, \qquad P\underline{e}_2 = \underline{g}_2 + \underline{g}_3\,, \qquad P\underline{e}_3 = \underline{g}_1 + \underline{g}_2 + \underline{g}_3\,,$$

con $\{\underline{g}_1 = (2, 0, 1)\,, \underline{g}_2 = (1, 3, 0)\,, \underline{g}_3 = (0, 1, 2)\}$. Determinare la matrice associata a P nella base canonica (base di partenza = base di arrivo = base canonica). Si verifichi ora che $\{\underline{g}_1, \underline{g}_2, \underline{g}_3\}$ è una base di $\mathbb{R}^3$. Determinare la matrice associata a P con base di partenza la base canonica e base di arrivo la base $\{\underline{g}_1, \underline{g}_2, \underline{g}_3\}$. Determinare l'immagine del vettore $\underline{u} = 2\underline{e}_1 + 3\underline{e}_2 + 2\underline{e}_3$ tramite P.

[1] si dice anche "biunivoca"

Esercizio 7.
7.1 Stabilire se la seguente proposizione è vera o falsa:
Un'applicazione lineare $S : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ *con* $n > m$ *non può essere iniettiva.*
7.2. Stabilire se la seguente proposizione è vera o falsa:
Un'applicazione lineare $T : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ *con* $n < m$ *non può essere suriettiva.*
Giustificate la vostra risposta.

Esercizio 8. Vero o Falso:

- *Un'applicazione lineare* $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *iniettiva è anche suriettiva.*
- *Un'applicazione lineare* $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *suriettiva è anche iniettiva.*

Giustificare la risposta.

Soluzione esercizio 1.
1.2 La proposizione è vera perché il nucleo di F_A ha dimensione $n - \text{rg}(A)$. Ma, per ipotesi, $\text{rg}(A) \leq m < n$ (perché, in generale, $\text{rg}(A) \leq \text{minimo}(m, n)$), quindi $n - \text{rg}(A) > 0$ e F_A non può essere iniettiva.
1.2 Anche la seconda proposizione è vera: infatti la dimensione dell'immagine di F_A è uguale al rango di A e dall'ipotesi segue che questa dimensione è strettamente minore di m; ma allora $\text{Im}F_A$ è un sottospazio *proprio* di $\mathbb{R}^m$ e l'applicazione non può essere suriettiva.

Soluzione esercizio 2. Entrambe vere. Per la prima: se F_A è iniettiva allora deve essere $\text{rg}(A) = n$ ma allora F_A è anche suriettiva perché l'immagine ha dimensione n. Analoga è la dimostrazione della veridicità della seconda proposizione.

Soluzione esercizio 3. Si verifica che A ha rango 3. Ne segue che $\text{Ker}F_A$ ha dimensione $3 - 3 = 0$ e quindi F_A è iniettiva. Per quanto appena visto è anche suriettiva e quindi è una biezione. L'immagine di $(1, 2, 1)$ è il vettore

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1+6-1 \\ 2+2-1 \\ 2+2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6 \\ 3 \\ 4 \end{vmatrix}.$$

Le immagini tramite F_A dei vettori della base canonica sono le colonne di A.

Soluzione esercizio 4. L'espressione di Q_A in coordinate è

$$Q_A(\underline{x}) = \begin{vmatrix} x_1 - x_2 + x_3 \\ 2x_1 - 3x_3 \\ -2x_2 + 5x_3 \end{vmatrix}.$$

In alternativa possiamo scrivere

$$\begin{vmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1 - x_2 + x_3 \\ 2x_1 - 3x_3 \\ -2x_2 + 5x_3 \end{vmatrix}.$$

Il resto dell'esercizio è standard:

$$\text{Ker}Q_A = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^3 \mid \begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 - 3x_3 = 0 \\ -2x_2 + 5x_3 = 0 \end{cases} \}$$

e si tratta come al solito di risolvere il sistema e trovare una base per lo spazio delle soluzioni. Si trova un nucleo di dimensione 1 generato dal vettore $(3, 5, 2)$. Lo spazio immagine ha dimensione 2, generato ad esempio dai 2 primi vettori colonna.

Infine, per determinare la controimmagine di $(2,-1,5)$ tramite Q_A occorre risolvere il sistema

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 2 \\ 2x_1 - 3x_3 = -1 \\ -2x_2 + 5x_3 = 5 \end{cases}$$

Soluzione esercizio 5. L'applicazione F è univocamente determinata perché stiamo richiedendo che sia lineare e perché i 3 vettori

$$(1,1,1) \quad (0,1,1) \quad (0,1,-1)$$

sono una base per $\mathbb{R}^3$, lo spazio di partenza (si veda pag. 155). Per determinare la matrice associata a F nella base canonica dobbiamo calcolare le coordinate dei vettori $F(\underline{e}_1)$, $F(\underline{e}_2)$, $F(\underline{e}_3)$; queste saranno, per definizione, le colonne della matrice cercata.

Osservazione. Notiamo una volta per tutte che una tripla $\underline{x}$ di $\mathbb{R}^3$ coincide con le sue coordinate rispetto alla base canonica

$$(x_1, x_2, x_3) = x_1(1,0,0) + x_2(0,1,0) + x_3(0,0,1).$$

Per poter calcolare $F(\underline{e}_1)$, $F(\underline{e}_2)$, $F(\underline{e}_3)$ dobbiamo esprimere i vettori della base canonica in funzione dei vettori

$$(1,1,1) \quad (0,1,1) \quad (0,1,-1)$$

sui quali sappiamo calcolare F. Si ha chiaramente $(1,0,0) = (1,1,1) - (0,1,1)$ e quindi, per linearità,

$$F(1,0,0) = F(1,1,1) - F(0,1,1) = (2,3,2) - (1,3,2) = (1,0,0)\,;$$

questa è la prima colonna della matrice. Analogamente

$$(0,1,0) = (0,\frac{1}{2},\frac{1}{2}) + (0,\frac{1}{2},-\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}(0,1,1) + \frac{1}{2}(0,1,-1)$$

e quindi

$$F(0,1,0) = F\left((0,\frac{1}{2},\frac{1}{2}) + (0,\frac{1}{2},-\frac{1}{2})\right) = \tag{2}$$

$$\frac{1}{2}F(0,1,1) + \frac{1}{2}F(0,1,-1) = \frac{1}{2}(1,3,2) + \frac{1}{2}(1,1,-2) = (1,2,0); \tag{3}$$

questa è la seconda colonna della matrice. Infine

$$(0,0,1) = (0,\frac{1}{2},\frac{1}{2}) - (0,\frac{1}{2},-\frac{1}{2})$$

e quindi

$$F(0,0,1) = \frac{1}{2}(1,3,2) - \frac{1}{2}(1,1,-2)$$

che è uguale a $(0,1,2)$. In definitiva,

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}$$

Soluzione esercizio 6. L'applicazione è univocamente determinata perché stiamo richiedendo che sia lineare e perché stiamo dando i suoi valori su una base di $\mathbb{R}^3$, lo spazio di partenza.

La matrice associata a P nella base canonica (base di partenza = base di arrivo = base canonica) si ottiene scrivendo le espressioni a destra in (1) in termini della base canonica; ma ciò è immediato

$$P\underline{e}_1 = 2(2,0,1) - 2(0,1,2) = (4,-2,-2)\,.$$

Questa è la prima colonna. Analogamente

$$P\underline{e}_2 = (1,3,0) + (0,1,2) = (1,4,2)\,, \quad P\underline{e}_3 = (2,0,1) + (1,3,0) = (4,3,1)$$

Quindi la matrice cercata è

$$\begin{vmatrix} 4 & 1 & 4 \\ -2 & 4 & 3 \\ -2 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

L'altra matrice, quella con base di partenza = base canonica e base di arrivo = base $\{\underline{g}_1, \underline{g}_2, \underline{g}_3\}$ è praticamente data nel testo dell'esercizio. Infatti per definizione questa matrice ha per colonne le coordinate dei vettori $P\underline{e}_j$ *nella base* $\{\underline{g}_1, \underline{g}_2, \underline{g}_3\}$. Ma questa è proprio l'informazione che viene fornita dal testo dell'esercizio. Quindi la matrice in questo caso è

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

Per determinare l'immagine del vettore $\underline{u} = 2\underline{e}_1 + 3\underline{e}_2 + 2\underline{e}_3 = (2,3,2)$ tramite P basterà calcolare il prodotto righe per colonne

$$\begin{vmatrix} 4 & 1 & 4 \\ -2 & 4 & 3 \\ -2 & 2 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \end{vmatrix}$$

Possiamo ancge procedere direttamente utilizzando la linearità:

$$P\underline{u} = P(2\underline{e}_1 + 3\underline{e}_2 + 2\underline{e}_3) = 2P\underline{e}_1 + 3P\underline{e}_2 + 2P\underline{e}_3$$
$$= 2(2\underline{g}_1 - 2\underline{g}_3) + 3(\underline{g}_2 + \underline{g}_3) + 2(\underline{g}_1 + \underline{g}_2 + \underline{g}_3) = \cdots$$

Soluzione esercizio 7. Una volta fissata la base canonica in $\mathbb{R}^n$, e la base canonica in $\mathbb{R}^m$ e una volta considerata la matrice associata ad S nella base canonica, sia essa A, con colonne $\underline{a}^j$, abbiamo, ripetendo quanto già visto a lezione:

$$S(\underline{x}) = S(x_1\underline{e}_1 + \cdots + x_n\underline{e}_n) = x_1 S(\underline{e}_1) + \cdots + x_n S(\underline{e}_n) = x_1\underline{a}^1 + \cdots + x_n\underline{a}^n = A\underline{x}$$

dove abbiamo usato la solita osservazione pag 37. Quindi l'applicazione S è l'applicazione F_A. Ma allora ci siamo ricondotti all'esercizio 1. Stessa cosa per il secondo quesito.

Soluzione esercizio 8. Si ragiona come sopra, riconducendosi al caso già studiato.

Osservazione. Utilizzando la Proposizione 4.4 pag 155 possiamo generalizzare l'esercizio 7 e l'esercizio 8 a spazi vettoriali di dimensione n ed m a ad applicazioni lineari qualsiasi: alla fine ci riduciamo sempre al caso matriciale che sappiamo trattare utilizzando il rango della matrice.

Soluzione esercizio 7 del compito del 6/11/02. *Sia* $V = \mathbb{R}^3$ *e siano*

$$U = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 - x_2 - x_3 = 0\} \quad W = \mathrm{Span}((1,0,-1),(1,-2,1)).$$

Determinare una base per $U \cap W$.

Possiamo procedere in due modi.

(1) Troviamo equazioni per W e risolviamo il sistema che ha come equazioni quelle che definiscono U e quelle che definiscono W. Vediamo i dettagli. Dato che W ha

dimensione 2 (perché i due vettori che lo generano non sono proporzionali e quindi sono linearmente indipendenti) sappiamo che esiste una matrice $C \in M_{(3-2)3}(\mathbb{R})$, cioè $C \in M_{13}(\mathbb{R})$, tale che

$$W = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^3 \mid C\underline{x} = \underline{0}\}$$

Per trovare C scriviamo

$$\left|\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & x_1 \\ 0 & -2 & x_2 \\ -1 & 1 & x_3 \end{array}\right|$$

Ora applichiamo EG↓ e otteniamo

$$\left|\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & x_1 \\ 0 & -2 & x_2 \\ 0 & 0 & x_3 + x_1 + x_2 \end{array}\right|$$

Ne segue che

$$W = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 + x_2 + x_3 = 0\} = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^3 \text{ tali che } \left|\begin{array}{ccc} 1 & 1 & 1 \end{array}\right| \left|\begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{array}\right| = 0\}$$

(quindi in questo caso $C = \left|\begin{array}{ccc} 1 & 1 & 1 \end{array}\right|$); ma allora

$$U \cap W = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^3 \mid \begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 0 \end{cases} \}$$

Rimane da risolvere questo sistema, trovando una base per l'insieme delle soluzioni. Ma questo è un problema che sapete sicuramente risolvere. Si trova $U \cap W = \mathrm{Span}(0, 1, -1)$.

(2) Scriviamo il generico vettore di W come combinazione lineare, con pesi α_1 e α_2, di $w_1 = (1, 0, -1)$,$w_2 = (1, -2, 1)$. Otteniamo il vettore $(\alpha_1 + \alpha_2, -2\alpha_2, -\alpha_1 + \alpha_2)$. Quindi

$$W = \{(\alpha_1 + \alpha_2, -2\alpha_2, -\alpha_1 + \alpha_2), \text{ al variare di } \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}\}.$$

Ora dobbiamo imporre che $(\alpha_1 + \alpha_2, -2\alpha_2, -\alpha_1 + \alpha_2)$ appartenga anche a U. Ciò accade se e solo se le sue coordinate verificano l'equazione che definisce U; deve essere quindi

$$(\alpha_1 + \alpha_2) - (-2\alpha_2) - (-\alpha_1 + \alpha_2) = 0$$

cioè $\alpha_1 = \alpha_2$. Conclusione i vettori che sono in W **e** in U sono i vettori che si ottengono come $\alpha\underline{w}_1 - \alpha\underline{w}_2$ per $\alpha \in \mathbb{R}$; ma

$$\alpha\underline{w}_1 - \alpha\underline{w}_2 = \alpha(0, 2, -2)$$

e quindi $U \cap W = \mathrm{Span}(0, 2, -2) = \mathrm{Span}(0, 1, -1)$ in accordo con quanto già trovato.

Riassunto delle ultime lezioni.

Abbiamo dato la definizione di applicazione $F_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ associata ad una matrice $A \in M_{mn}(\mathbb{R})$. Questa è l'applicazione che associa ad $\underline{x} \in \mathbb{R}^n$ il vettore $\underline{y} = A\underline{x}$, un vettore in $\mathbb{R}^m$. Si scrive anche

$$F_A(\underline{x}) = A\underline{x}\,, \text{ oppure } \underline{x} \longrightarrow A\underline{x}\,, \text{ oppure } \underline{y} = A\underline{x}\,.$$

Abbiamo definito il nucleo di F_A e lo abbiamo collegato all'iniettività di F_A: F_A *è iniettiva se e solo se il nucleo è banale.* La dimensione del nucleo è uguale a

$n - \mathrm{rg}(A)$. Quindi F_A è iniettiva se e solo se $n - \mathrm{rg}(A) = 0$ cioè se e solo se $n = \mathrm{rg}(A)$.

Abbiamo verificato che $\mathrm{Im}F_A = \mathrm{Span}(\underline{a}^1, \ldots, \underline{a}^n)$. In particolare $\mathrm{Im}F_A$ è un sottospazio di $\mathbb{R}^m$ ed ha dimensione uguale a $\mathrm{rg}(A)$; sappiamo inoltre determinare una base di $\mathrm{Im}F_A$. In particolare F_A è suriettiva se e solo se $m = \mathrm{rg}(A)$. Abbiamo osservato che se $\underline{b} \in \mathrm{Im}F_A$ allora la controimmagine di $\underline{b}$ tramite F_A, detta anche immagine inversa di $\underline{b}$ tramite F_A e denotata $\mathrm{Im}^{-1}_{F_A}(\underline{b})$, è uguale all'insieme delle soluzioni del sistema lineare non omogeneo $A\underline{x} = \underline{b}$.

F_A è biettiva (si dice anche "F_A è una biezione" oppure "F_A è biunivoca") se è iniettiva e suriettiva. In tal caso esiste l'inversa di F_A. Da quanto sopra segue che *F_A è una biezione se e solo se $n = m = \mathrm{rg}(A)$*. Abbiamo verificato che in questo caso $(F_A)^{-1} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ è semplicemnte l'applicazione associata a A^{-1} (notare che A^{-1} esiste dato che $\mathrm{rg}(A) = n$): in formule

$$(F_A)^{-1}\underline{y} = A^{-1}\underline{y}$$

Possiamo scrivere in maniera più suggestiva $(F_A)^{-1} = F_{A^{-1}}$.

Abbiamo dato la definizione di *applicazione lineare* $F : V \to W$ fra due spazi vettoriali qualsiasi (anche di dimensione infinita).

Ci siamo poi concentrati su spazi di dimensione finita. Abbiamo visto che un'applicazione lineare è completamente determinata una volta assegnati i suoi valori su una base di V.

Abbiamo visto che se V ha dimensione finita uguale ad n e W ha dimensione finita uguale a m, allora, **una volta fissata una base $\{\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_n\}$ in V e una base $\{\underline{w}_1, \ldots, \underline{w}_m\}$ in W** possiamo associare a F una matrice $A \in M_{nm}(\mathbb{R})$. Questa è per definizione la matrice che ha come **j-ma colonna** le coordinate del vettore $F(v_j)$ nella base $\underline{w}_1, \ldots, \underline{w}_m$. Questa matrice ha la seguente notevole proprietà: se $\underline{v} \in V$ ha coordinate $\underline{x}$ rispetto alla base $\{\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_n\}$ e se $F(\underline{v})$ ha coordinate $\underline{y}$ rispetto alla base $\{\underline{w}_1, \ldots, \underline{w}_m\}$, allora vale $\underline{y} = A\underline{x}$.

Caso particolare: sia $A \in M_{nm}(\mathbb{R})$ e sia $F_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ l'applicazione lineare associata ad A. Fissiamo la base canonica in $\mathbb{R}^n$ e la base canonica in $\mathbb{R}^m$. Con questa scelta di basi, la matrice associata ad F_A è proprio A.

Altro caso particolare: sia $S : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ un'applicazione lineare. Fissiamo la base canonica in $\mathbb{R}^n$ e la base canonica in $\mathbb{R}^m$. Sia $A \in M_{mn}(\mathbb{R})$ la matrice che ha come colonne $\underline{a}^1, \underline{a}^2, \ldots, \underline{a}^n$ le m-ple

$$S(\underline{e}_1),\ S(\underline{e}_2),\ \ldots,\ S(\underline{e}_n);$$

questa è la matrice associata ad S rispetto alla scelta : *base canonica nello spazio $\mathbb{R}^n$ di partenza, base canonica nello spazio $\mathbb{R}^m$ di arrivo.* Allora

$$S\underline{x} = S(x_1\underline{e}_1 + \cdots + x_n\underline{e}_n) = x_1\underline{a}^1 + \cdots + x_n\underline{a}^n = A\underline{x}$$

dove abbiamo usato la linearità nel secondo passaggio e la solita osservazione pag 37 nel terzo passaggio. Osservazione: ne concludiamo che ogni applicazione lineare $S : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ è del tipo F_A per un certo A.