Geometria 1. I^0 Modulo. a.a. 00/01. Gruppo E-N
Esercizi di ripasso del 7/11/00

Esercizio 1. Siano $a, b \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{N}$. Si consideri la matrice $n \times n$

$$A(a,b,n) = \begin{vmatrix} a & b & b & \dots & \dots & b \\ b & a & b & \dots & \dots & b \\ \vdots & b & a & \dots & \dots & b \\ \vdots & \vdots & b & \dots & \dots & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \dots & b \\ b & b & b & \dots & \dots & a \end{vmatrix}.$$

Consideriamo poi la matrice

$$C(a,b,n) = \begin{vmatrix} a & b-a & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ b & a-b & b-a & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & 0 & a-b & b-a & \dots & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & 0 & a-b & \dots & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & 0 & \dots & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \dots & b-a \\ b & 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & a-b \end{vmatrix}$$

Verificare che

$$\det A(a,b,n) = \det C(a,b,n)$$

Esercizio 2. Utilizzando la nozione di determinante stabilire se la matrice

$$A = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

è invertibile ed in caso affermativo calcolare l'inversa (facendo uso del metodo che utilizza l'aggiunta di A).

Esercizio 3. Stabilire quali dei seguenti sottoinsiemi di $\mathbb{R}^n$ sono sottospazi :
3.1. $W_1 = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^n \mid x_1 \cdot x_2 \cdots x_n = 0\}$
3.2 Fissiamo $\underline{\eta} \in \mathbb{R}^n$ e consideriamo $W_2 = \{(t\eta_1, \dots, t\eta_n)\,,\ -1 \leq t \leq 1\}$.

Esercizio 4. Sia $W = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^5 \mid x_1 + x_3 = 0\}$.
Spiegare perché W è un sottospazio.
Determinare una base di W.
Determinare un sottospazio U di $\mathbb{R}^5$ tale che $\mathbb{R}^5 = U \oplus W$.

Esercizio 5. Sia V uno spazio vettoriale e siano $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_k$ vettori linearmente indipendenti. Verificare che se $c_1, \dots, c_n \in \mathbb{R}$, $c_j \neq 0\ \forall j$, allora i vettori

$$\underline{w}_1 = c_1\underline{v}_1\,, \dots\dots, \underline{w}_k = c_k\underline{v}_k$$

sono anche linearmente indipendenti.