Algebra Lineare. Gruppo I-Z. Prof. P. Piazza
Compito per il fine settimana del 7/8 Dicembre 2002.

Complementi sui polinomi.
Cominciamo con il richiamare il

Teorema fondamentale dell'algebra. *Ogni polinomio a coefficienti complessi $P(\lambda)$ ammette una radice; in altre parole l'equazione $P(\lambda) = 0$ ammette una soluzione.*

Sia $P(\lambda)$ un polinomio di grado n: $P(\lambda) = a_n\lambda^n + \cdots + a_1\lambda + a_0$. Possiamo supporre senza perdita di generalità per quanto segue che $a_n = 1$. Per il teorema fondamentale dell'algebra $P(\lambda) = 0$ ammette una soluzione complessa μ_1. Si può dimostrare (ma noi non lo facciamo) che il polinomio $P(\lambda)$ è allora divisibile per il polinomio $(\lambda - \mu_1)$; questo vuol dire che

$$P(\lambda) = (\lambda - \mu_1)Q(\lambda)$$

(non c'è resto). Riapplicando il teorema fondamentale dell'algebra al polinomio $Q(\lambda)$ e procedendo induttivamente capiamo che esistono n numeri complessi $\mu_1, \ldots, \mu_n$ tali che $P(\lambda) = (\lambda - \mu_1)\cdots(\lambda - \mu_n)$. Questi numeri $\mu_j \in \mathbb{C}$ sono quindi **le** radici di $P(\lambda)$: sono in numero di n. Fra questi μ_j alcuni saranno coincidenti. Siano $\{\mu_1, \ldots, \mu_k\}$ le radici distinte; allora

$$P(\lambda) = (\lambda - \mu_1)^{h(\mu_1)} \cdot \cdots \cdot (\lambda - \mu_k)^{h(\mu_k)}.$$

Il numero intero $h(\mu_j)$ è, per definizione, la molteplicità di μ_j come radice del polinomio.
Riassumendo: **ogni polinomio complesso di grado n ammmette n radici contate con la loro molteplicità.**
Supponiamo ora che $P(\lambda)$ sia un polinomio *reale*; questo vuol dire che i coefficienti a_j sono numeri reali. Se consideriamo $P(\lambda)$ come polinomio a coefficienti complessi (cosa lecita dato che $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$) allora possiamo applicare quanto appena visto e concludere che esistono n numeri complessi $\mu_1, \ldots, \mu_n \in \mathbb{C}$ tali che

$$P(\lambda) = (\lambda - \mu_1)\cdots(\lambda - \mu_n).$$

Dato che il polinomio ha i coefficienti reali si ha che che se $\mu \in \mathbb{C}$ è una radice complessa di $P(\lambda)$ allora anche $\overline{\mu} \in \mathbb{C}$ è una radice complessa di $P(\lambda)$, dove vi ricordo che se $\mu = a + ib$ allora $\overline{\mu} = a - ib$. [1] Quindi le radici di $P(\lambda)$ sono reali oppure complesse-coniugate (non-reali). Siano

$$c_1 = \mu_1,\ \ \overline{c_1} = \mu_2, \ldots\ldots,\ \ c_k = \mu_{2k-1},\ \ \overline{c_k} = \mu_{2k}, \quad 0 \le 2k \le n$$

le radici complesse coniugate, e siano

$$r_1 = \mu_{2k+1}\,, \ldots\ldots, r_{n-2k} = \mu_n$$

le radici reali. Allora

$$P(\lambda) = (\lambda - c_1)\cdot(\lambda - \overline{c_1})\cdots(\lambda - c_k)\cdot(\lambda - \overline{c_k})\cdot(\lambda - r_1)\cdots(\lambda - r_{n-2k}).$$

[1] Infatti: $P(\mu) = 0 \Rightarrow a_n\mu^n + \cdots + a_1\mu + a_0 = 0 \Rightarrow \overline{a_n\mu^n + \cdots + a_1\mu + a_0} = 0 \Rightarrow a_n\overline{\mu}^n + \cdots + a_1\overline{\mu} + a_0 = 0 \Rightarrow P(\overline{\mu}) = 0$.

Quindi[2]

$P(\lambda) = (\lambda^2 - (c_1 + \overline{c_1})\lambda + |c_k|^2) \cdots (\lambda^2 - (c_k + \overline{c_k})\lambda + |c_k|^2) \cdot (\lambda - r_1) \cdots (\lambda - r_{n-2k}).$

In parole: ogni polinomio reale si decompone nel prodotto di polinomi *reali* di secondo grado [3] che non ammettono radici reali e di polinomi reali di primo grado (che quindi ammettono una radice reale). Se $k = 0$ le radici sono tutte reali; se $2k < n$ allora esiste almeno una radice reale.
È importante notare che se $n = 2m + 1$ allora, ovviamente, $2k < 2m + 1 \equiv n$; quindi un polinomio reale di grado *dispari* ammette sempre (almeno) una radice reale. Detto in parole; le radici complesse non reali vengono in coppie complesse-coniugate e se il grado del polinomio è dispari allora rimane qualche radice "spaiata" che deve essere necessariamente reale.
Sia ora V uno spazio vettoriale reale di dimensione n. Sia $F : V \to V$ lineare e sia $P_F(\lambda)$ il polinomio caratteristico di F; $P_F(\lambda)$ è un polinomio a coefficienti reali di grado n e le sue radici **reali** sono tutti e soli gli autovalori di F. Notiamo che se $\dim V = 2m + 1$ allora F ammette autovettori (perché esiste almeno un autovalore). Se il polinomio ha grado pari, allora potrebbero non esistere radici reali del polinomio caratteristico: in questo caso non esistono autovettori per F (perché non esistono autovalori). Abbiamo visto l'esempio di una rotazione di $\pi/2$ nel piano con polinomio caratteristico $\lambda^2 + 1$.
Definizione. Sia $\lambda \in \mathbb{R}$ un autovalore di F. La *molteplicità algebrica* di λ è la sua molteplicità come radice del polinomio caratteristico $P_F(\lambda)$.
Definizione. Sia $\lambda \in \mathbb{R}$ un autovalore di F. La *molteplicità geometrica* di λ è la dimensione dell'autospazio $V_\lambda(F)$.

Sia V è uno spazio vettoriale *complesso* e $F : V \to V$ un'applicazione lineare. Il polinomio caratteristico di F è ora un polinomio a coefficienti complessi e per il teorema fondamentale dell'algebra esistono sempre n-radici, contate con la loro molteplicità. A differenza del caso reale, esistono quindi autovettori per F. Non è detto tuttavia che esista una base di V costituita da autovettori per F.

Esercizio 1. Sia $V = \mathbb{R}^3$ con base canonica fissata. Consideriamo l'applicazione lineare $F_A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definita dalla matrice:

$$A = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ -3 & 1 & 3 \end{vmatrix}.$$

1.1. Determinare gli autovalori di F_A.
1.2. Determinare equazioni cartesiane per gli autospazi associati.
1.3. Per ogni autospazio determinare una base.
1.4. Verificare che esiste una base di $\mathbb{R}^3$ costituita da autovettori per F_A. Determinare esplicitamente una tale base. Questa base è unica ?
1.5. Scrivere la matrice associata a F_A nella base di cui in 1.4. [4]
1.6 Determinare una matrice invertibile M tale che $M^{-1}\,A\,M$ sia diagonale. Questa matrice M è unica ?

---

[2]Vi ricordo che $\overline{a + ib} = a - ib$ e $|a + ib|^2 = a^2 + b^2 = (a + ib) \cdot (\overline{a + ib})$.
[3]Perché $c_j \overline{c_j} = |c_j|^2 \in \mathbb{R}$ e $(c_j + \overline{c_j}) \in \mathbb{R}$
[4]Utilizzate la definizione di matrice associata ad F_A in una base $\{\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3\}$; vi ricordo che questa è la matrice che ha come j-ma colonna le coordinate di $F_A(\underline{v}_j)$ nella base $\{\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3\}$.

Esercizio 2. Rifare l'Esercizio 1 ma per l'operatore $F_A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definito dalla matrice

$$\begin{vmatrix} 0 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 0 \end{vmatrix}.$$

Esercizio 3. Consideriamo la matrice reale

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}.$$

(i) Stabilire se A è diagonalizzabile su $\mathbb{R}$.
(ii) Stabilire se A è diagonalizzabile su $\mathbb{C}$.
Trovare eventualmente una matrice diagonalizzante. [5]

Esercizio 4. Consideriamo la matrice reale:

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & \pi & 0 \\ 0 & 1 & \sqrt{2} & 0 & \pi \\ 0 & 0 & 1 & 0 & e \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

(i) Stabilire se A è diagonalizzabile su $\mathbb{R}$.
(ii) Stabilire se A è diagonalizzabile su $\mathbb{C}$.
Trovare eventualmente una matrice diagonalizzante.

Soluzione esercizio 1.

1.1. *Determinare gli autovalori di F_A.*
Soluzione 1.1. Abbiamo visto che gli autovalori di F_A sono le radici del polinomio caratteristico $P_{F_A}(\lambda)$. La matrice associata a F_A nella base canonica è proprio A e quindi $P_{F_A}(\lambda) = P_A(\lambda)$ con

$$P_A(\lambda) = det \begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 3 \\ -3 & 1 & 3-\lambda \end{vmatrix}.$$

Calcolando il determinante otteniamo: $P_A(\lambda) = (2-\lambda)(\lambda^2 - 4\lambda)$. Ne segue che F_A ha autovalori $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 2$, $\lambda_3 = 4$.

1.2. *Determinare equazioni cartesiane per gli autospazi associati.*

Soluzione 1.2. Vi ricordo che

$$V_\lambda = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^3 \, ; \, F_A\underline{x} = \lambda\underline{x}\} \equiv \{\underline{x} \in \mathbb{R}^3 \, ; \, A\underline{x} = \lambda\underline{x}\} = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^3 \, ; (A - \lambda \mathrm{I}_3)\underline{x} = \underline{0}\}.$$

Quindi $V_0 = \{\underline{x}\, ; \, A\underline{x} = \underline{0}\} = \mathrm{Ker}F_A$; questo sottospazio sappiamo già calcolarlo ed otteniamo

$$V_0 = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^3 \, ; \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 + 3x_3 = 0 \end{cases} \}$$

[5]Osservazione. Nel linguaggio degli operatori questo esercizio si riscrive come segue: *Sia* $A = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}$. *(i) Stabilire se l'operatore* $F_A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *è diagonalizzabile. (ii) Stabilire se l'operatore* $F_A^{\mathbb{C}} : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ *è diagonalizzabile.*
Trovare eventualmente una base diagonalizzante.

Passiamo a V_2; la matrice $A - 2\mathrm{I}_3$ è data da

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 3 \\ -3 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

e quindi

$$V_2 = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^2 \, ; \left\{ \begin{array}{l} -x_2 + 3x_3 = 0 \\ -3x_1 + x_2 + x_3 \end{array} \right. \}$$

Procedendo analogamente si trova:

$$V_4 = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^3 \, ; \left\{ \begin{array}{l} x_1 = 0 \\ x_2 - x_3 = 0 \end{array} \right. \}$$

1.3. *Per ogni autospazio determinare una base.*

Soluzione 1.3. In questo caso ogni autospazio è un sottospazio di dimensione 1 (una retta): infatti ognuno dei 3 sistemi è un sistema lineare omogeneo di 2 equazioni in 3 incognite e di rango 2. Risolvendo i sistemi si trova

$$V_0 = \mathbb{R}(0, -3, 1)\,, \quad V_2 = \mathbb{R}(4, 9, 3)\,, \quad V_4 = \mathbb{R}(0, 1, 1)\,,$$

dove abbiamo introdotto la notazione $\mathbb{R}(x_1, x_2, x_3)$ per $\mathrm{Span}(x_1, x_2, x_3)$.

1.4. *Verificare che esiste una base di $\mathbb{R}^3$ costituita da autovettori per F_A. Determinare esplicitamente una tale base. Questa base è unica ?*

Soluzione 1.4. I vettori generatori dei 3 autospazi sono linearmente indipendenti, come subito si verifica calcolando, ad esempio, il determinante dell'opportuna matrice; più intelligentemente osserviamo che i 3 autovalori sono *distinti* e per quanto visto a lezione ne segue che i corrispondenti autovettori sono linearmente indipendenti. Quindi *una* base di $\mathbb{R}^3$ costituita da autovettori di F_A è

$$\underline{v}_1 = (0, -3, 1)\,, \quad \underline{v}_2 = (4, 9, 3)\,, \quad \underline{v}_3 = (0, 1, 1)$$

Questa base **non** è ovviamente unica; possiamo scegliere 3 generatori diversi nei 3 autospazi V_0, V_2, V_4 e ottenere così una diversa base di autovettori. Ad esempio

$$\underline{w}_1 = (0, 6, -2)\,, \quad \underline{w}_2 = (4\pi, 9\pi, 3\pi)\,, \quad \underline{w}_3 = (0, \sqrt{39}, \sqrt{39})\,.$$

1.5. *Scrivere la matrice associata a F_A nella base di cui in 1.4.*

Soluzione 1.5. Come spiegato in dettaglio a lezione la matrice associata ad F_A in una base di autovettori è proprio la matrice diagonale che ha sulla diagonale gli autovalori di F_A (nell'ordine dato dall'ordine degli autovettori). In questo caso, per la base

$$\underline{v}_1 = (0, -3, 1) \in V_0\,, \quad \underline{v}_2 = (4, 9, 3) \in V_2\,, \quad \underline{v}_3 = (0, 1, 1) \in V_4$$

otteniamo la matrice

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{vmatrix}$$

1.6 *Determinare una matrice invertibile M tale che $M^{-1}\,A\,M$ sia diagonale.*

Soluzione 1.6. Abbiamo a questo punto due basi di $\mathbb{R}^3$; la base canonica e la base di autovettori

$$\underline{v}_1 = (0, -3, 1)\,, \quad \underline{v}_2 = (4, 9, 3)\,, \quad \underline{v}_3 = (0, 1, 1)$$

Sia M la matrice che ha come j-ma colonna le coordinate di $\underline{v}_j$ nella base canonica:

$$M = \begin{vmatrix} 0 & 4 & 0 \\ -3 & 9 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix} .$$

Sappiamo che la matrice B associata a F_A nella nuova base è data da

$$B = M^{-1}AM$$

D'altra parte abbiamo già calcolato questa matrice utilizzando l'informazione che la base $\{\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3\}$ è una base di autovettori ed abbiamo trovato

$$B = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{vmatrix}$$

In definitiva, la matrice M è tale che

$$M^{-1}AM = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{vmatrix}$$

come si voleva. La matrice M non è ovviamente unica dato che dipende dalla scelta della base di autovettori ed abbiamo già visto che questa scelta non è unica.

Soluzione Esercizio 2. Il polinomio caratteristico di F_A è $P_{F_A}(\lambda) \equiv P_A(\lambda) = (1-\lambda)(\lambda-1)(\lambda+1)$ che ha ovviamente radici $\lambda_1 = 1$ *contata due volte* o, più precisamente, *con molteplicità algebrica 2* e $\lambda_2 = 1$. Gli autospazi sono

$$V_1 = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^3 \,;\, x_1 + 2x_2 + x_3 = 0\}$$

e

$$V_{-1} = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^3 \,;\, \begin{cases} x_1 - 2\underline{x}_2 - \underline{x}_3 = 0 \\ x_2 = 0 \end{cases} \}$$

Quindi

$$V_1 = \mathrm{Span}((1,0,-1),(2,1,0))\,, \quad V_{-1} = \mathbb{R}(1,0,1)\,.$$

Questi 3 vettori sono **una** base di $\mathbb{R}^3$ costituita da autovettori per F_A. [6] La matrice associata a F_A nella base di autovettori è la matrice

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} .$$

La matrice M che ha come colonne le coordinate, nella base canonica, degli autovettori, e cioè la matrice

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

ha la proprietà che

$$M^{-1}AM = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} .$$

La matrice diagonalizzante M non è unica.

[6] Un'altra base di autovettori si ottiene scegliendo una diversa base nel sottospazio 2 dimensionale $\{\underline{x} \in \mathbb{R}^3 \,;\, x_1 + 2x_2 + x_3 = 0\}$ ed un diverso generatore nel sottospazio 1-dimensionale $\mathbb{R}(1,0,1)$.

Soluzione esercizio 3. Il polinomio caratteristico della matrice data è uguale a $\lambda^2 - 4\lambda + 5$. Questo polinomio ammette le due radici complesse coniugate $2 \pm i$. Ne segue che la matrice *non* è diagonalizzabile nel campo reale. D'altra parte la matrice è diagonalizzabile nel campo $\mathbb{C}$ dato che le due radici sono *distinte*. Per determinare una matrice diagonalizzante M consideriamo l'operatore $F_A^{\mathbb{C}} : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ definito dalla matrice reale data. Basterà determinare una base diagonalizzante per $F_A^{\mathbb{C}}$, cioè una base di autovettori $\{\underline{f}_1, \underline{f}_2\}$ per $F_A^{\mathbb{C}}$; la matrice M sarà allora la matrice che ha per colonne le coordinate degli autovettori di $F_A^{\mathbb{C}}$. Si ha

$$V_{(2-i)}(F_A^{\mathbb{C}}) = \{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 \mid (-1+i)z_1 - z_2 = 0\}$$

e quindi

$$V_{(2-i)}(F_A^{\mathbb{C}}) = \mathbb{C}(1, -1+i) = \mathbb{C}\underline{f}_1 \text{ , con } \underline{f}_1 = (1, -1+i)$$

Analogamente $V_{(2+i)}(F_A^{\mathbb{C}}) = \mathbb{C}(-1, 1+i) = \mathbb{C}\underline{f}_2$, con $\underline{f}_2 = (-1, 1+i)$.
Quindi una matrice diagonalizzante M è data da

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ (-1+i) & (1+i) \end{vmatrix} .$$

Soluzione esercizio 4. Il polinomio caratteristico di A è uguale a $P_A(\lambda) = (1-\lambda)^5$ che ha la radice $\lambda_1 = 1$ con molteplicità algebrica 5.
Vogliamo prima stabilire se l'operatore $F_A : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^5$ è diagonalizzabile, cioè se esiste una base di $\mathbb{R}^5$ costituita da autovettori per F_A. Sappiamo che l'operatore F_A ammette il solo autovalore $\lambda = 1$ con molteplicità algebrica 5. D'altra parte l'autospazio associato a tale autovalore è

$$V_1 = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^5 \mid (A - I_5)\underline{x} = \underline{0}\}$$

Questo è il sottospazio di $\mathbb{R}^5$ costituito dai vettori $\underline{x} \in \mathbb{R}^5$ tali che

$$\begin{cases} x_2 + \pi x_4 = 0 \\ \sqrt{2}x_3 + \pi x_5 = 0 \\ x_5 = 0 \end{cases}$$

Ne segue che la molteplicità geometrica dell'autovalore $\lambda = 1$, cioè la dimensione dell'autospazio V_1, è uguale a $5 - 3 = 2$ e che quindi F_A *non* è diagonalizzabile.
Lo stesso discorso vale per $F_A^{\mathbb{C}}$ che è quindi anche *non* diagonalizzabile. [7]
Conclusione: La matrice A non è diagonalizzabile né su $\mathbb{R}$, né su $\mathbb{C}$.

[7] V_1 è un sottospazio di $\mathbb{C}^5$ di dimensione $5 - 3 = 2$ e $2 < 5$ =molteplicità algebrica di 1.