Geometria 1. I^0 Modulo. a.a. 00/01. Gruppo E-N
Esercizi per il giorno 7/12/00

Introduzione/Riassunto.
Riassumiamo informalmente quanto visto sullo spazio affine. Il nostro punto di partenza è stato lo *spazio ordinario* e le sue proprietà elementari. In una prima approssimazione possiamo pensare allo spazio ordinario come allo spazio fisico circostante. Le sue proprietà elementari nascono dall'esperienza: i concetti geometrici di punto, retta, piano, la loro mutua posizione etc... nascono da nozioni concrete tratte dalla considerazione dello spazio fisico. Da un punto di vista matematico queste proprietà elementari, (ad esempio "per due punti passa una ed una sola retta") non possono essere *dimostrate* a partire dall'esperienza fisica. Il primo a capire questa difficoltà fu Euclide il quale estrasse alcuni *assiomi* (o *postulati*) fondamentali sui quali fondare rigorosamente la geometria. Gli assiomi, insieme alle proprietà che da essi si possono dedurre, formano il complesso della *Geometria Euclidea*, che è quella che si studia alla scuola media. Seguendo la trattazione data da Hilbert nel suo celebre "Fondamenti della geometria", gli assiomi della geometria euclidea si possono riassumere in cinque gruppi

1. *Assiomi di appartenenza* (del tipo "per tre punti non-allineati passa uno ed un solo piano"...).
2. *Assiomi di ordine* (permettono di fissare un verso su una retta)
3. *Assiomi di congruenza* (danno la nozione di confronto ed uguaglianza fra segmenti e fra angoli).
4. *Assiomi di continuità* (quelli dei numeri reali).
5. *Assioma delle parellele*.

Lo spazio è quindi un insieme i cui elementi sono detti punti e nel quale sono dati alcuni sottoinsiemi (rette, piani, segmenti...) verificanti questi 5 gruppi di assiomi. A priori ci possono essere varie geometrie euclidee: Hilbert dimostra che due geometrie euclidee differenti sono di fatto equivalenti e possono essere assimilate. Esiste quindi una sola geometria euclidea che è proprio quella che era nella testa di Euclide verso il 300 A.C.
Passiamo alla geometria affine. Concentriamoci per un momento sugli assiomi del *terzo* gruppo, gli assiomi di congruenza. Fra questi assiomi di congruenza ci sono quelli che fanno intevenire la nozione di uguaglianza e confronto di segmenti che si trovano su una stessa retta oppure su rette parallele. Una nozione o una proprietà dello spazio è detta *affine* se, insieme agli assiomi 1, 2, 4, 5, fa intevenire soltanto gli assiomi di congruenza appena citati; *non* fa quindi intevenire gli assiomi di congruenza che stabiliscono il confronto e l'uguaglianza fra segmenti appartenenti a rette *non-paralle* ; non fa neppure intervenire la nozioni di confronto ed uguaglianza fra angoli. Essere un triangolo isoscele, ad esempio, non è una proprietà affine. La nozione di parallelogramma è, invece, affine. Tutte le proprietà dedotte per mezzo dei vettori di $\mathcal{V}_O$ sono affini. Le proprietà di incidenza e parallelismo sono affini. Si noti che il teorema di Pitagora non ha senso nella geometria affine (non possiamo confrontare le lunghezze dei lati di un triangolo perché le rette sui quali giacciono non sono parallele, né possiamo dare un senso alla nozione di triangolo rettangolo, non potendo misurare gli angoli).

Lo spazio ordinario insieme agli assiomi 1,2,4,5 e agli assiomi di congruenza "ridotti" appena citati è detto *spazio affine*. La geometria affine è lo studio delle proprietà delle figure che si possono dedurre dagli assiomi. Per lo spazio affine si usa a volte la notazione A^3 (invece di $\mathcal{E}^3$, che si utilizza per lo spazio euclideo).

Fissiamo un punto O ed una base $\underline{i}$, $\underline{j}$, $\underline{k}$ per la spazio vettoriale $\mathcal{V}_O$. Rimane individuato un riferimento affine $RA(O, \underline{i}, \underline{j}\, \underline{k})$ con coordinate (x, y, z). Si usa anche la notazione $RA(O, x, y, z)$.

Abbiamo visto che un piano π dello spazio è individuato da un punto Q e due vettori linearmente indipendenti $\underline{w}_1, \underline{w}_2$ in $\mathcal{V}_O$. Il sottospazio vettoriale 2-dimensionale $W = \text{Span}(\underline{w}_1, \underline{w}_2)$ è detto la *giacitura* del piano. I due vettori $\underline{w}_1, \underline{w}_2$ sono, per definizione, due *vettori di giacitura* per π. Se il piano è assegnato tramite tre punti non allineati P_0, P_1, P_2 allora possiamo scegliere, ad esempio, $Q = P_0$ e

$$\underline{w}_1 = \underline{OP_1} - \underline{OP_0}\,, \qquad \underline{w}_2 = \underline{OP_2} - \underline{OP_0}.$$

Supponiamo che $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ e che $\underline{w}_1 = (a_1, b_1, c_1)$, $\underline{w}_2 = (a_2, b_2, c_2)$ e sia π il piano da essi individuato. Allora π ha equazioni parametriche

$$(x, y, z) = (x_0, y_0, z_0) + s(a_1, b_1, c_1) + t(a_2, b_2, c_2) \quad s, t \in \mathbb{R}$$

ed equazioni cartesiane ottenute sviluppando secondo la prima riga il determinante nell'equazione:

$$\det \begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} = 0.$$

Questa è un'equazione del tipo

$$Ax + By + Cz + D = 0 \qquad \text{con} \quad (A, B, C) \neq (0, 0, 0)\,.$$

I numeri reali A, B, C sono detti *parametri di giacitura*. Viceversa, sappiamo che il sottoinsieme dei punti P dello spazio le cui coordinate soddisfano una tale equazione è un piano e più precisamente il piano passante per una soluzione particolare Q dell'equazione data e con giacitura

$$W = \{\underline{w} \in \mathcal{V}_O \mid Aw^1 + Bw^2 + Cw^3 = 0\}.$$

Il punto Q e i due vettori di giacitura si ottengono applicando il teorema di struttura all'equazione $Ax + By + Cz + D = 0$ che definisce il piano.

Una retta r è data assegnando un punto $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ ed un *vettore direzione* $\underline{w} = (l, m, n) \neq \underline{0}$. Il sottospazio vettoriale $W = \mathbb{R}\underline{w} \subset \mathcal{V}_O$ è detto la *direzione* di r. Le coordinate di $\underline{w}$ sono, per definizione, i *parametri direttori* di r. Ovviamente sono definiti a meno di un fattore di proporzionalità non nullo. Le equazioni parametriche di tale retta sono date da

$$(x, y, z) = (x_0, y_0, z_0) + t(l, m, n) \quad t \in \mathbb{R}.$$

Abbiamo visto (lezione del 1/12/00) che allora le equazioni cartesiane sono date imponendo che sia

$$rg \begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ l & m & n \end{vmatrix} = 1\,.$$

Se, ad es. $l \neq 0$ allora questa condizione si traduce nelle due equazioni non omogenee

$$\det \begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 \\ l & m \end{vmatrix} = 0\,, \quad \det \begin{vmatrix} x - x_0 & z - z_0 \\ l & n \end{vmatrix} = 0\,,$$

che è del tipo

$$\begin{cases} AX + BY + CZ + D = 0 \\ A'X + B'Y + C'Z + D' = 0 \end{cases} \quad \text{con} \quad r \begin{vmatrix} A & B & C \\ A' & B' & C' \end{vmatrix} = 2$$

come deve essere. Viceversa sappiamo che il sottoinsieme di A^3 costitutito dai punti le cui coordinate soddisfano un tale sistema è una retta, e più precisamente la retta passante per una soluzione particolare del sistema dato e di direzione

$$W = \{\underline{w} \in \mathcal{V}_O \mid \begin{cases} Aw^1 + Bw^2 + Cw^3 = 0 \\ A'w^1 + B'w^2 + C'w^3 = 0 \end{cases} \}.$$

(Utilizzare come al solito il teorema di struttura.) Notare che per un'osservazione sui sistemi omogenei 2×3 dimostrata a lezione il 1/12/00, si ha che $W = \mathbb{R}\underline{w}$ con $\underline{w}$ ottenuto prendendo i determinanti a segni alterni delle sottomatrici 2×2 che si ottengono da

$$\begin{vmatrix} A & B & C \\ A' & B' & C' \end{vmatrix}$$

cancellando la prima, seconda e terza colonna.

Abbiamo poi studiato la mutua posizione di rette e piani. Riassumiamo e precisiamo i risultati in una Proposizione. Tutta la dimostrazione, che è stata in gran parte vista a lezione, si può fare utilizzando esclusivamente il Teorema di Rouché-Capelli. Provate a ricostruire la dimostrazione da soli. (Questo sarebbe un gran bell'esercizio (non difficile e divertente).) Notate che gli assiomi della geometria affine già ci dicono quali sono le eventualità che si possono presentare per la mutua posizione di rette e piani.

Proposizione. *1. Due piani π, π' di equazione cartesiana*

$$Ax + By + Cz + D = 0\,, \qquad A'x + By' + C'z + D' = 0$$

sono paralleli se e soltanto se i coefficienti di giacitura sono proporzionali e cioè sse

$$rg\begin{vmatrix} A & B & C \\ A' & B' & C' \end{vmatrix} = 1.$$

Il rango è invece uguale a due se e solo se $\pi \cap \pi' = r$, con r una retta (vedi sopra). Se π e π' sono paralleli allora $\pi = \pi'$ oppure $\pi \cap \pi' = \emptyset$ a seconda che sia rispettivamente

$$rg\begin{vmatrix} A & B & C & D \\ A' & B' & C' & D' \end{vmatrix} = 1\,, \qquad rg\begin{vmatrix} A & B & C & D \\ A' & B' & C' & D' \end{vmatrix} = 2\,.$$

(Utilizzate Rouché-Capelli per quest'ultima affermazione).

2. Sia $r = \pi \cap \pi'$ una retta e sia σ il piano di equazione cartesiana $\alpha X + \beta Y + \gamma Z + \delta = 0$. Sia $W = \mathbb{R}(l, m, n)$ la direzione di r. Allora r è parallela a σ se e soltanto se

$$\alpha l + \beta m + \gamma n = 0\,.$$

Equivalentemente, sse

$$rg\begin{vmatrix} A & B & C \\ A' & B' & C' \\ \alpha & \beta & \gamma \end{vmatrix} = 2$$

e cioè se e soltanto se il determinante di questa matrice 3×3 *è* $= 0$. (Per vedere l'equivalenza delle due condizioni sviluppate il determinante secondo la terza riga e tenete conto di come si ottengono i parametri direttori di una retta a partire dalle sue equazione cartesiane). *Se r e σ sono paralleli allora $r \subset \sigma$ o $r \cap \sigma = \emptyset$ a seconda che sia rispettivamente*

$$rg \begin{vmatrix} A & B & C & D \\ A' & B' & C' & D' \\ \alpha & \beta & \gamma & \delta \end{vmatrix} = 2 \qquad rg \begin{vmatrix} A & B & C & D \\ A' & B' & C' & D' \\ \alpha & \beta & \gamma & \delta \end{vmatrix} = 3.$$

Si ha invece che $r \cap \sigma = P$ se e soltanto se

$$rg \begin{vmatrix} A & B & C \\ A' & B' & C' \\ \alpha & \beta & \gamma \end{vmatrix} = 3$$

(e cioè il determinante è diverso da zero).
3. Sono date due rette r e ρ dello spazio affine A^3 di equazione rispettivamente

$$\begin{cases} ax + by + cz + d = 0 \\ a'x + b'y + c'z + d' = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \alpha x + \beta y + \gamma z + \delta = 0 \\ \alpha' x + \beta' y + \gamma' z + \delta' = 0 \end{cases} .$$

r e ρ sono complanari se e soltanto se la matrice

$$\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ a' & b' & c' & d' \\ \alpha & \beta & \gamma & \delta \\ \alpha' & \beta' & \gamma' & \delta' \end{vmatrix}$$

ha determinante uguale a zero. Se r e ρ sono complanari allora

$$r = \rho, \qquad r \cap \rho = P, \qquad r // \rho$$

a seconda che si abbia rispettivamente

$$rg \begin{vmatrix} a & b & c & d \\ a' & b' & c' & d' \\ \alpha & \beta & \gamma & \delta \\ \alpha' & \beta' & \gamma' & \delta' \end{vmatrix} = rg \begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha' & \beta' & \gamma' \end{vmatrix} = 2 \ ,$$

$$rg \begin{vmatrix} a & b & c & d \\ a' & b' & c' & d' \\ \alpha & \beta & \gamma & \delta \\ \alpha' & \beta' & \gamma' & \delta' \end{vmatrix} = rg \begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha' & \beta' & \gamma' \end{vmatrix} = 3 \ ,$$

$$rg \begin{vmatrix} a & b & c & d \\ a' & b' & c' & d' \\ \alpha & \beta & \gamma & \delta \\ \alpha' & \beta' & \gamma' & \delta' \end{vmatrix} = 3 \quad rg \begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha' & \beta' & \gamma' \end{vmatrix} = 2$$

ESERCIZI. Spazio affine A^3 con riferimento affine $RA(O, x, y, z)$ fissato.

Esercizio 1. Scrivere l'equazione cartesiana del piano per il punto $(0, 2, 0)$ e per la retta di equazione cartesiana

$$\begin{cases} x - z = 3 \\ y + 2z = 1 \end{cases}$$

Esercizio 1.5 Determinare l'equazione cartesiana per il piano π che contiene il punto $(3, 2, 1)$ e la retta di equazioni parametriche $x = 2 + 3t$, $y = 4 + t$, $z = 1 + 5t$.

Esercizio 2. Determinare equazioni cartesiane per la retta passante per $Q = (-1,-1,-1)$, contenuta nel piano π di equazioni $x+y+z+3=0$ e complanare alla retta s di equazioni

$$\begin{cases} x-2z+4=0 \\ 2y-z=0 \end{cases}$$

Esercizio 3. Verificare che se r e ρ sono date in forma ridotta

$$\begin{cases} x = lz+p \\ y = mz+q \end{cases} \qquad \begin{cases} x = l'z+p' \\ y = m'z+q' \end{cases}$$

allora r è complanare a ρ sse la matrice

$$\begin{vmatrix} l-l' & p-p' \\ m-m' & q-q' \end{vmatrix}$$

ha determinante uguale a zero.

Esercizio 4. Determinare le equazioni cartesiane della retta $\widetilde{r}$ parallela alla retta r di equazioni

$$\begin{cases} x-2y-1=0 \\ y-z+2=0 \end{cases}$$

e complanare alle rette sghembe s e t di equazioni rispettivamente

$$\begin{cases} x+2z-1=0 \\ y-z-3=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x-z-2=0 \\ y+z=0 \end{cases}$$

Suggerimento: utilizzare il risultato dell'esercizio precedente.

Esercizio 5. Determinare le equazioni cartesiane della retta r passante per $(4,1,0)$ ed complanare alle due rette dell'esercizio precedente.

Esercizio 6. Determinare l'equazione del piano per $Q_0 = (1,2,-1)$ e parallelo alle rette r ed s di equazioni

$$\begin{cases} x+y-z=0 \\ x+3z=1 \end{cases}, \qquad \begin{cases} x=-1+t \\ y=t \\ z=3+4t \end{cases}$$

Esercizio 7. Decidere se le due rette:

$$\begin{cases} x+1=0 \\ z-2=0 \end{cases}, \qquad \begin{cases} 2x+y-2z+6=0 \\ y+z-2=0 \end{cases}$$

sono complanari. In caso affermativo, stabilire se sono incidenti o parallele e determinare l'equazione del piano che le contiene.

Esercizio 8. Determinare la retta r per il punto $Q_0 = (1,-1,-1)$ e complanare alle rette s ed t di equazione

$$\begin{cases} 2x+2y+1=0 \\ -2x+3y+z=0 \end{cases}, \qquad \begin{cases} y=2 \\ z=1 \end{cases}.$$

Studiare la mutua posizione di r con s e t