Paolo Piazza

Corso di Laurea Magistrale

Topologia Algebrica. a.a. 2013-14

Fasci e teoremi di Hodge-de Rham-Dolbeault:
breve guida alla letteratura.

0.1. **Varietà complesse.** Griffiths-Harris [3] pp 14 → 18

0.2. **Fasci e Prefasci.** Referenze: Warner [13], Sezioni 5.1 → 5.8

- Definizione di fascio $\mathcal{S} \xrightarrow{\pi} M$ di K-moduli, K un dominio a ideali principali.
- Definizione di sezione s su un aperto $U \subset M$. Notazione: $s \in \Gamma(U, \mathcal{S})$. Struttura di K-modulo di $\Gamma(U, \mathcal{S})$.
- Esempio: il fascio dei germi delle funzioni C^∞ di una varietà differenziabile. Notazione: $\mathcal{C}^\infty(M)$.
- Esempio: il fascio dei germi di funzioni olomorfe su una varietà complessa M. Notazione: $\mathcal{O}(M)$.
- Un fascio $\mathcal{S}$ non è necessariamente uno spazio di Hausdorff.
- Morfismi di fasci. Nucleo, immagine, quoziente. Successioni esatte corte.
- Prefasci.
- Prefascio $\alpha(\mathcal{S})$ delle sezioni di un fascio.
- Fascio $\beta(P)$ associato ad un prefascio.
- Prefasci completi. $\alpha(\beta(P))$. $\beta(\alpha(\mathcal{S}))$.

0.3. **Coomologia a valori in un fascio.** Referenze: [13] p 200 e seguenti oppure Griffiths-Harris [3] p. 38 e seguenti.

- Motivazioni: Griffiths-Harris [3] p. 38.
- Definizione di coomologia valori in un fascio: $H^*(M, \mathcal{S})$ è il limite diretto di $H^*(\mathcal{U}, \mathcal{S})$.
- Teorema di Leray (per l'enunciato vedi Griffiths-Harris [3] p. 40).
- Successione esatta lunga. Vedi [13] p. 203/204.
- Fasci fini. Esempi : germi di funzioni C^∞, germi di forme differenziali. [13] p. 170
- Fasci fini sono aciclici. [13] p. 202, intorno alla formula 14. In alternativa [3] p. 42.
- Risoluzioni. Wells [14] p. 58.
- Teorema delle risoluzioni acicliche. Wells [14] p. 59, 60.
- Morfismi di risoluzioni acicliche; naturalità. Wells [14] p. 59, 60.

0.4. **Esempi di risoluzioni acicliche.**

- risoluzione di de Rham ([13] p. 189, 190, 191). Se $\underline{\mathbb{R}}$ è il fascio costante allora la risoluzione di de Rham è
$$0 \to \underline{\mathbb{R}} \to \mathcal{C}^\infty(M, \Lambda^0(M)) \to \mathcal{C}^\infty(M, \Lambda^1(M)) \to \dots$$
(assumendo che ogni forma chiusa in $\mathbb{R}^n$, o nella palla unitaria in $\mathbb{R}^n$, è anche esatta (Lemma di Poincaré)). Denotiamo il fascio dei germi delle forme differenziali $\mathcal{C}^\infty(M, \Lambda^q(M))$ tramite $\underline{\Omega}^q(M)$ e riscriviamo brevemente la risoluzione di de Rham come:
$$0 \to \underline{\mathbb{R}} \to \underline{\Omega}^*(M)$$
- risoluzione di Dolbeault; è una risoluzione del fascio dei germi delle funzioni olomorfe, $\mathcal{O}(M)$:
$$0 \to \mathcal{O}(M) \to \mathcal{C}^\infty(M, \Lambda^{0,0}(M)) \to \mathcal{C}^\infty(M, \Lambda^{0,1}(M)) \to \dots$$
(assumendo il Lemma di Poincaré per l'operatore $\overline{\partial}$). [3] p. 45. Denotiamo il fascio dei germi delle forme differenziali $\mathcal{C}^\infty(M, \Lambda^{p,q}(M))$ tramite $\underline{\Omega}^{p,q}(M)$. Quindi la risoluzione di Dolbeault può essere scritta brevemente come:
$$0 \to \mathcal{O}(M) \to \underline{\Omega}^{0,*}(M)$$

- risoluzione di Dolbeault del fascio delle p-forme olomorfe $\underline{\Omega}^p_{\mathcal{O}}(M)$
$$0 \to \underline{\Omega}^p_{\mathcal{O}}(M) \to \underline{\Omega}^{p,*}(M)$$
(assumendo il Lemma di Poincaré per l'operatore $\overline{\partial}$). [3] p. 45.
- il prefascio delle cocatene singolari ed il suo fascio associato $\mathcal{S}^*(M,\mathbb{R})$. $\mathcal{S}^*(M,\mathbb{R})$ è un fascio fine. [13] p. 191, 192, 193.
- la risoluzione data dal fascio delle cocatene singolari
$$0 \to \underline{\mathbb{R}} \to \mathcal{S}^0(M,\mathbb{R}) \to \mathcal{S}^1(M,\mathbb{R}) \to \dots$$
[13] p. 194, 195
- la risoluzione data dal fascio delle cocatene singolari C^∞
$$0 \to \underline{\mathbb{R}} \to \mathcal{S}^0_\infty(M,\mathbb{R}) \to \mathcal{S}^1_\infty(M,\mathbb{R}) \to \dots$$
[13] p. 194, 195
- Teorema di de Rham: l'integrazione di forme sulle catene induce un morfismo di risoluzioni, da $0 \to \underline{\mathbb{R}} \to \underline{\Omega}^*(M)$ a $0 \to \underline{\mathbb{R}} \to \mathcal{S}^*_\infty(M,\mathbb{R})$, che induce a sua volta un isomorfismo
$$H^q(\Gamma(M,\underline{\Omega}^*(M)) = H^q(\Gamma(M,\mathcal{S}^*_\infty(M,\mathbb{R})).$$
Wells [14].
- Il membro a sinistra è isomorfo in maniera naturale a $H^q_{\mathrm{dR}}(M)$. [13] p. 190, 191.
- Il membro a destra è isomorfo $H^q(\Gamma(M,\mathcal{S}^*(M,\mathbb{R}))$ sempre perché c'è un morfismo naturale di risoluzioni.
- La coomologia $H^q(\Gamma(M,\mathcal{S}^*(M,\mathbb{R}))$ è isomorfa naturalmente alla coomologia singolare: infatti, c'è una morfismo naturale $S^*(M,\mathbb{R}) \xrightarrow{\gamma} \Gamma(M,\mathcal{S}^*_\infty(M,\mathbb{R}))$, $\gamma(\phi)(m) = \rho^M_m(\phi)$ e quindi una successione esatta
$$0 \to \mathrm{Ker}\gamma \to S^*(M,\mathbb{R}) \xrightarrow{\gamma} \Gamma(M,\mathcal{S}^*_\infty(M,\mathbb{R}))$$
Si dimostra che γ è suriettiva e che esiste quindi una successione esatta corta
$$0 \to \mathrm{Ker}\gamma \to S^*(M,\mathbb{R}) \xrightarrow{\gamma} \Gamma(M,\mathcal{S}^*_\infty(M,\mathbb{R})) \to 0$$
Infine, si dimostra che $\mathrm{Ker}\gamma$ è aciclico e che c'è quindi un isomorfismo
$$H^q(\Gamma(M,\mathcal{S}^*_\infty(M,\mathbb{R})) = H^q(S^*(M,\mathbb{R})) \equiv H^*(M,\mathbb{R})$$
(basta applicare la successione esatta lunga). Tutto ciò lo trovate in Warner [13] p. 196 $\to$ 200. Tutto ciò ridimostra il teorema di de Rham.
- Preliminari al Lemma di Poincaré per l'operatore $\overline{\partial}$: formula di Cauchy e applicazioni. Griffiths-Harris [3] p. 2, 3.
- $\overline{\partial}$-Poincaré Lemma in dimensione 1: Griffiths-Harris [3] p. 5.
- $\overline{\partial}$-Poincaré Lemma: Griffiths-Harris [3] p. 25, 26, 27.
- Isomorfismo di Dolbeault: se M è una varietà complessa allora $H^q(M,\underline{\Omega}^p_{\mathcal{O}}) \simeq H^{p.q}_{\overline{\partial}}(M)$ (è conseguenza diretta del $\overline{\partial}$-Poincaré Lemma, perché quest'ultimo ci dice che la risoluzione di Dolbeault $0 \to \underline{\Omega}^p_{\mathcal{O}}(M) \to \underline{\Omega}^{p,*}(M)$ è aciclica.

0.5. **Operatore $*$ di Hodge.**
- Su varietà reali: Warner p. 220
- Su varietà complesse: Griffiths-Harris [3] p. 82
- Prodotti scalari L^2 e aggiunti formali di d e $\overline{\partial}$: Warner p. 221/ Griffiths-Harris [3] p. 80

0.6. **Enunciati del teorema di Hodge-de Rham e del teorema di Hodge-Dolbeault.**

- Su varietà reali (Hodge-de Rham): Warner p. 222/223
- Su varietà complesse (Hodge-Dolbeault): Griffiths-Harris [3] p. 84
- Applicazione 1: finito-dimensionalità della coomologia di de Rham e di Dolbeault su varietà compatte.
- Applicazione 2: dualità di Poincaré (Warner p. 226)
- Applicazione 3: dualità di Kodaira-Serre (Griffiths-Harris [3] p. 102)
- Applicazione 4: teorema di Künneth (Griffiths-Harris [3] p. 104)

References

[1] M. Atiyah. *K-Theory*, Benjamin, New York, 1967.

[2] N. Berline, E. Getzler e M. Vergne. *Heat kernels and Dirac operators*, Springer-Verlag 1992.

[3] P. Griffiths, J. Harris. *Priciples of Algebraic Geometry*, Wiley, New York.

[4] D. Husemmoler. *Fibre bundles*, GTM Vol. 20, Springer-Verlag, 1975.

[5] K. Kodaira. *Complex manifolds and deformations of complex structures.* Grundlehren der Math. Wiss. **283**. Springer.

[6] H. B. Lawson, M. Michelshon. *Spin Geometry* Princeton Mathematical Series, Vol 38.

[7] J. Milnor. *Morse theory*, Ann. Math. Studies 51, Princeton University Press, Princeton 1963.

[8] J. Milnor e J.D. Stasheff. *Characteristic classes*, Ann. Math. Studies 51, Princeton University Press, Princeton 1974.

[9] J. Roe. *Elliptic operators, topology and asymptotic methods* (Second Edition). Longman Scientific and Technical 1998.

[10] E. Sernesi. *Geometria 2*. Bollati-Boringhieri.

[11] M. Shubin. *Pseudodifferential operators and spectral theory*. Second Edition. Springer-Verlag.

[12] M. Spivak. *A Comprehensive Introduction to Differential Geometry*, vol. I, II ed., Publish or Perish, Inc., Wilmington, Delaware, 1979.

[13] F. Warner. *Foundations of Differentiable manifolds and Lie Groups*. Graduate text in Mathematics **94**. Springer-Verlag.

[14] R. O. Wells Jr. *Differential analysis on complex manifolds* Graduate text in Mathematics. **65** Springer-Verlag.