Corso di Laurea Specialistica. a.a. 2004-2005

Teoria di Hodge

Terzo compito a casa.

Esercizio 1. La convoluzione di due funzioni $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ è definita come

$$f * g(x) := \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y)dy \tag{1}$$

Verificare che $f * g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ e che $\widehat{f * g} = \hat{f}\hat{g}$. Utilizzando la formula d'inversione di Fourier verificare anche che $\widehat{fg} = \hat{f} * \hat{g}$. Dimostrare che $(f, g)_{L^2} = (\hat{f}, \hat{g})_{L^2}$.

Esercizio 2. Sia M una varietà differenziabile e sia $P \in \Psi^m(M)$. Vi ricordo che ciò implica che per ogni carta $\chi : \Omega \to U \subset \mathbb{R}^n$, l'operatore locale indotto A_U appartiene a $\Psi^m(U)$. Sia $x \in \Omega \subset M$; abbiamo definito il simbolo principale di A calcolato in $\sum \xi^j d\chi_j(x) \in T^*M|_\Omega$ come il simbolo pricipale di A_U calcolato in $(\chi(x), \xi) \in T^*U$. Verificare che il simbolo principale di A è globalmente definito.

Esercizio 3. Siano E,F due fibrati vettoriali su M. Sia

$$P \ : \ C^\infty(M, E) \to C^\infty(M, E)$$

un operatore differenziale di ordine k: $P \in \mathrm{Diff}^k(M; E, F)$. Diamo una definizione alternativa di simbolo principale

$$\sigma_{\mathrm{pr}}(P) \in C^\infty(M, \mathrm{Hom}(\pi^* E, \pi^* F))$$

Sia $\xi \in T^*_x M$ ed $e_x \in E_x$; introduciamo $f \in C^\infty(M)$ ed $e \in C^\infty(M, E)$ tali che $df|_x = \xi$ e $e(x) = e_x$. Definiamo $\sigma_{\mathrm{pr}}(P)(\xi) \in Hom(E_x, F_x)$ come segue :

$$\sigma_{\mathrm{pr}}(P)(x, \xi)(e_x) = i^k \frac{1}{k!} P((f - f(x))^k e)(x)$$

Verificare che $\sigma_{\mathrm{pr}}(P)(\xi)$ non dipende dalle scelte fatte e che è una applicazione lineare da E_x in F_x.

Verificare che se M è uguale ad un aperto U di $\mathbb{R}^n$ e se E ed F sono i fibrati prodotto su U allora questa nozione si riduce alla usuale nozione di simbolo principale per una matrice (P_{ij}) di operatori differenziali: se

$$(P_{ij}) = \left(\sum_{|\alpha| \le k} a_\alpha(ij) \left(\frac{1}{\sqrt{-1}} \frac{\partial}{\partial x_1} \right)^{\alpha_1} \cdots \left(\frac{1}{\sqrt{-1}} \frac{\partial}{\partial x_n} \right)^{\alpha_n} \right)$$

allora

$$\sigma_{\mathrm{pr}}((P_{ij}))(x,\xi) = \left(\sum_{|\alpha|=k} a_\alpha(ij)(\xi^1)^{\alpha_1}\dots(\xi^n)^{\alpha_n} \right).$$

Esercizio 4. Sia M una varietà compatta e sia $P \in \Psi^m_{\mathrm{cl}}(M;E,F)$ un operatore pseudodifferenziale ellittico. Dimostrare che la proiezione ortogonale Π su Ker$P$. è un operatore regolarizzante: $\Pi \in \Psi^{-\infty}_{\mathrm{cl}}$.
Supponiamo che $\operatorname{ind} P = 0$.
Verificare che esiste $K \in \Psi^{-\infty}_{\mathrm{cl}}(M;E,F)$ tale che $P + K$ si estende ad un isomorfismo $H^s(M,E) \to H^{s-m}(M,F)$ $\forall s$.
Cosa si può dire se $\operatorname{ind} P > 0$ (rispettivamente $\operatorname{ind} P < 0$) ?
Suggerimento: dimostrare e utilizzare l'esistenza di un sottospazio finito dimensionale $L \subset C^\infty(M,F)$ tale che

$$L \simeq \mathrm{coker}P\,, \qquad L \oplus \mathrm{Im}(P) = C^\infty(M,F)$$

Esercizio 5. Sia U un aperto di $\mathbb{R}^n$, siano $\alpha(1),\dots\alpha(\ell)$ multiindici e siano $a_{\alpha(j)}(x) \in C^\infty_c(U)$, $j = 1,\dots,\ell$.
Consideriamo l'operatore $P := \sum_j a_{\alpha(j)} R_{\alpha(j)}$ con

$$(R_{\alpha(j)}u)(x) := \int_{\mathbb{R}^n} e^{i<x,\xi>}(\frac{\xi}{|\xi|})^{\alpha(j)}\hat{u}(\xi)d\xi$$

dove

$$(\xi/|\xi|)^\beta = \frac{(\xi_1^{\beta_1}\cdots\xi_n^{\beta_n})}{|\xi|^{|\beta|}}\,.$$

Verificare che $P = A + K$ con $A \in \Psi^*(U)$ e $K \in \Psi^{-\infty}$. Determinare l'ordine di A.

Esercizio 6. Sia $a(x,y,\xi) \in S^d(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ us simbolo come nell'enunciato del lemma di Kuranishi. Abbiamo visto che se $a(x,y,\xi)$ è identicamente uguale a zero in un intorno della diagonale in $\mathbb{R}^n_x \times \mathbb{R}^n_y$ allora l'operatore

$$Au(x) = \int\int e^{i<x-y,\xi>}a(x,y,\xi)u(y)dyd\xi$$

è un operatore in $\Psi^{-\infty}$ e quindi $Au(x) = \int K(x,y)u(y)dy$ con $K \in C^\infty$.
Dimostrate questo fatto direttamente, utilizzando l'identità

$$\Delta_\xi e^{i<x-y,\xi>} = |x-y|^2 e^{i<x-y,\xi>} \text{ con } \Delta_\xi := \sum_j D^2_{\xi_j}\,,$$

e l'integrazione per parti nell'integrale che definisce A (da giustificare).