Corso di Laurea Specialistica. a.a. 2004-2005

Teoria di Hodge

Secondo compito a casa

Esercizio 1. Sia $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \subset C^\infty(\mathbb{R}^n)$ lo spazio delle funzioni a decrescenza rapida:

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) := \{f \in C^\infty(\mathbb{R}^n) \,|\, \forall \alpha, \beta \, \exists \, C_{\alpha\beta} \, \text{tale che} \, |x^\alpha D_x^\beta f| \leq C_{\alpha,\beta}\}\,.$$

Sia $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$; la sua trasformata di Fourier, $\hat{f}$, è la funzione

$$\hat{f}(\xi) := \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i<x,\xi>} f(x) dx \tag{1}$$

Verificare che per ogni multi-indice α

$$\xi^\alpha \hat{f} = \widehat{(D_x^\alpha f)}\,, \quad D_\xi^\alpha \hat{f} = (-1)^{|\alpha|} \widehat{(x^\alpha f)} \tag{2}$$

Dimostrare che $\hat{f} \in \mathcal{S}$.

Calcolare la trasformata di Fourier di $f(x) = \exp(-\frac{1}{2}|x|^2)$.

Esercizio 2. Sia $U \subset \mathbb{R}^n$ aperto e consideriamo l'insieme $\tilde{S}^m(U \times \mathbb{R}^n)$ costituito da tutte le funzioni $p(x, \xi) \in C^\infty(U \times \mathbb{R}^n)$ tali che per ogni compatto $K \subset U$, $\forall \alpha, \forall \beta, \exists \, C_{K,\alpha,\beta}$ tale che

$$|D_x^\alpha D_\xi^\beta p(x, \xi)| \leq C_{K,\alpha,\beta}(1 + |\xi|)^{m-|\beta|} \quad x \in K, \xi \in \mathbb{R}^n \tag{3}$$

In altre parole, non richiediamo che p abbia x-supporto compatto ma richiediamo una stima su ogni compatto di U. Sia $u \in C_c^\infty(U)$; definiamo

$$Pu(x) := \int_{\mathbb{R}^n} p(x, \xi) \hat{u}(\xi) e^{i<x,\xi>} d\xi$$

Verificare che P definisce un operatore lineare

$$P : C_c^\infty(U) \to C^\infty(U)\,.$$

Sia $U = \mathbb{R}^n$ e supponiamo che $p(x, \xi) \in C^\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ abbia la proprietà che $\forall \alpha, \forall \beta, \exists \, C_{\alpha,\beta}$ tale che

$$|D_x^\alpha D_\xi^\beta p(x, \xi)| \leq C_{\alpha,\beta}(1 + |\xi|)^{m-|\beta|} \quad x \in \mathbb{R}^n, xi \in \mathbb{R}^n \tag{4}$$

verificare che P manda $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ in $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

Esercizio 3. Verificare che il simbolo principale dell'operatore $d : C^\infty(M, \Lambda^k M) \to C^\infty(M, \Lambda^{k+1} M)$ (differenziale esterno) è dato da

$$\sigma_{\rm pr}(d)(\xi)(\omega_x) = i\xi \wedge \omega_x \quad \forall \xi \in T_x^* M\,, \forall \omega_x \in \Lambda_x^k M\,.$$

Dedurne che il complesso di de Rham è un complesso *ellittico*. Analogamente, determinare il simbolo principale dell'operatore

$$\overline{\partial} : C^\infty(M, \Lambda^{k,\ell} M) \to C^\infty(M, \Lambda^{k,\ell+1} M)$$

su una varietà complessa M e dedurne che il complesso di Dolbeault è ellittico.

Esercizio 4. Sia $U \subset \mathbb{R}^n$ un aperto, sia $K \subset U$ un compatto e sia $P \in \Psi^d_K(U)$. Consideriamo $u, v \in C^\infty(U)$ con supporto in K. Si ha allora

$$(Pu, v)_{L^2} = \int\int\int e^{i<x-y,\xi>} p(x,\xi) u(y) \overline{v}(x) dy d\xi dx$$

Verificare che è possibile scambiare l'ordine di integrazione ottenendo:

$$(Pu, v)_{L^2} = \int\int\int e^{i<x-y,\xi>} p(x,\xi) u(y) \overline{v}(x) dx d\xi dy$$

Esercizio 5. Sia M una varietà compatta. Dimostrare che la definizione di spazio di Sobolev $H_s(M)$ data a lezione (tramite un atlante $\{U_j, k_j\}$, $k_j : U_j \to \mathcal{O}_j \subset \mathbb{R}^n$, e una partizione dell'unità $\{\phi_j\}$ subordinata al ricoprimento $\{U_j\}$) è ben posta: se $\{U'_\ell, k'_\ell, \phi'_\ell\}$ è una diversa scelta di atlante e partizione dell'unità, allora le due norme $\| \cdot \|_s$ e $\| \cdot \|'_s$ sono equivalenti.

Esercizio 6. Consideriamo $L^2(S^1)$ e la sua base ortonormale $\{z^j\}_{j\in\mathbb{Z}}$. L'espansione di una funzione f secondo questa base è la serie di Fourier di f:

$$f = \sum \hat{f}(j) z^j \, .$$

I numeri $\hat{f}(j) =< f, z^j >_{L^2}$ sono i coefficienti di Fourier di f. Consideriamo il sottospazio $H_+ := \text{Span}(z^j, j \geq 0)$ e sia Π_+ la proiezione ortogonale su H_+. Se $f \in C(S^1)$ definiamo $T_f : H_+ \to H_+$ come l'operatore $\Pi_+ M_f|_{H_+}$ con M_f l'operatore di moltiplicazione per f.

6.1. Verificare che T_f è lineare e continuo.

6.2. Verificare che se $j \in \mathbb{N}$

$$(\widehat{T_f(u)})(j) = \sum_0^\infty \hat{f}(j-n)\hat{u}(n)$$

6.3. Verificare che $C(S^1) \ni f \to T_f$ definisce una mappa lineare continua fra le algebre di Banach $C(S^1)$ e $\mathcal{L}(H_+)$. Denotiamo con T questa mappa.

6.4. Sia $\mathcal{K}$ l'ideale degli operatori compatti in $\mathcal{L}(H_+) \equiv \mathcal{L}$ e sia $\mathcal{L}/\mathcal{K}$ l'algebra quoziente (algebra di Calkin). Sia π la proiezione $\mathcal{L} \to \mathcal{L}/\mathcal{K}$. Sappiamo che un operatore T è di Fredholm se e solo se $\pi(T)$ è invertibile nell'algebra di Calkin.

Sia $f(z) = z^m$ Verificare che T_f è di Fredholm.

Suggerimento: Verificare che se $f, g \in C(S^1)$ hanno uno sviluppo di Fourier con un numero finito di termini,

$$f = \sum_{|j| \leq n} \hat{f}(j) z^j\,, \quad g = \sum_{|j| \leq m} \hat{g}(j) z^j$$

allora $T_{fg} - T_f T_g$ è un operatore di rango finito e quindi compatto. [1] Per verificare quest'ultima proprietà può essere utile fare uso dell'analogo discreto delle formule $\widehat{f * g} = \hat{f}\hat{g}$, $\widehat{fg} = \hat{f} * \hat{g}$ e dell'esercizio 6.2. Calcolare $\pi T(1)$ con 1 uguale alla funzione costante uguale a 1. Concludere.

[1] In altre parole, per queste particolari funzioni $\pi T(fg) = \pi(T(f))\pi(T(g))$