

Corso di Laurea Specialistica. a.a. 2004-2005

Teoria di Hodge

Compito a casa del 1/12/04 (Primo compito)

Esercizio 1. Sia (E, π_E, X) un fibrato vettoriale e sia $\{U_\alpha\}$ un ricoprimento di aperti banalizzanti per E . Rimane allora definito il cociclo $\{g_{\alpha\beta}\}$ delle funzioni di transizione

$$g_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \rightarrow GL(k, \mathbb{R})$$

Sia ora (F, π_F, X) un secondo fibrato e supponiamo che gli aperti $\{U_\alpha\}$ siano banalizzanti anche per (F, π_F, X) . Sia $\{f_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \rightarrow GL(k, \mathbb{R})\}$ il cociclo associato a questo secondo fibrato. In generale diremo che due cocicli $\{k_{\alpha\beta}\}$ e $\{h_{\alpha\beta}\}$ sono equivalenti se $\forall \alpha$ esiste $\lambda_\alpha : U_\alpha \rightarrow GL(k, \mathbb{R})$ continuo tale che

$$k_{\alpha\beta} = \lambda_\alpha h_{\alpha\beta} \lambda_\beta^{-1}.$$

Verificare che (E, π_E, X) è isomorfo a (F, π_F, X) se e solo se i rispettivi cocicli sono equivalenti.

Esercizio 2. Sia X uno spazio topologico e $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ un ricoprimento. Supponiamo che per ogni coppia $(\alpha, \beta) \in A \times A$ sia assegnata una funzione continua

$$g_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \rightarrow GL(k, \mathbb{R})$$

e che questa collezione di mappe verifichi le seguenti proprietà:

- 1) $g_{\alpha\beta}^{-1} = g_{\beta\alpha}$
- 2) $g_{\alpha\beta} \circ g_{\beta\gamma} = g_{\alpha\gamma}$ in $U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma$.

Sia \hat{E} l'unione disgiunta dei $U_\alpha \times \mathbb{R}^k$; introduciamo una relazione d'equivalenza \mathcal{R} in \hat{E} come segue

$$U_\alpha \times \mathbb{R}^k \ni (x, e) \mathcal{R} (y, f) \in U_\beta \times \mathbb{R}^k \Leftrightarrow x = y \text{ e } f = g_{\alpha\beta}(x)e$$

Sia E lo spazio quoziente dotato della topologia indotta e sia $\pi : E \rightarrow X$ la mappa che associa alla classe d'equivalenza di (x, e) il punto $x \in X$. Verificare che (E, π, X) è un fibrato vettoriale di rango k .

Esercizio 3. Sia $E \rightarrow X$ un fibrato vettoriale di rango k . Verificare che è ben definito il duale di E , E^* . Determinare le funzioni di transizione di E^* a partire da quelle di E .

Esercizio 4. Siano (E, π_E, X) e (F, π_F, X) due fibrati vettoriali. Sia $\phi : E \rightarrow F$ un morfismo di fibrati e supponiamo che $\phi|_{E_x}$ sia un isomorfismo per ogni $x \in X$. Verificare che ϕ è allora un isomorfismo di fibrati (e cioè ϕ è anche un omeomorfismo).

Esercizio 5.

5.1. Verificare che $\mathbb{C}P^n$ è una varietà complessa di dimensione (complessa) n .

5.2 Sia $L := E_{1,n+1}(\mathbb{C})$ il fibrato universale su $\mathbb{C}P^n$. Verificare che L è un fibrato complesso di rango 1 e olomorfo.

5.3 Consideriamo in particolare $\mathbb{C}P^1$. Descrivere le funzioni di transizione di L^k , $k \in \mathbb{N}$ (con L^k uguale al prodotto tensoriale di L con se stesso k volte). Descrivere le funzioni di transizione di $(L^*)^k$. Poniamo $L^{-k} = (L^*)^k$.

Vero o falso : $\ell \neq k \Rightarrow L^\ell$ e L^k non sono isomorfi.

(Osserviamo che le funzioni di transizione del prodotto tensoriale sono il prodotto tensoriale delle funzioni di transizione. Qui parliamo di un fibrato di rango 1, quindi...).

Esercizio 6. Sia $n > k$ e sia $G_k(\mathbb{R}^n)$ l'insieme dei sottospazi vettoriali k -dimensionali di \mathbb{R}^n . Abbiamo dotato $G_k(\mathbb{R}^n)$ di una topologia. Dimostrare che $G_k(\mathbb{R}^n)$ ha una struttura di varietà differenziabile di dimensione $k(n - k)$.

Potete procedere in due modi:

1) richiamate quanto fatto in classe e dimostrate che le applicazioni ϕ_α che abbiamo definito sono effettivamente delle carte e danno alla grassmanniana una struttura di varietà differenziabile reale;

2) procedete secondo i seguenti suggerimenti:

(2.1). Sia W un sottospazio di dimensione $n - k$ di \mathbb{R}^n e sia

$$O_W = \{V \in G_k(\mathbb{R}^n) \mid V \cap W = \underline{0}\}$$

Sia V_0 un elemento di O_W . Costruire delle applicazioni biettive

$$O_W \leftrightarrow \text{Hom}(V_0, W) \leftrightarrow \mathbb{R}^{k(n-k)}.$$

1

(2.2) Sia $\phi : O_W \rightarrow \mathbb{R}^{k(n-k)}$ l'applicazione biettiva appena costruita: verificare che gli O_W sono aperti e le ϕ omeomorfismi.

¹Ulteriori suggerimenti per questo primo punto:

(i) Dato $A \in \text{Hom}(V_0, W)$ sia $V_A = \{\underline{v} + A\underline{v}, \underline{v} \in V_0\}$, $V_A \subset \mathbb{R}^n$. Verificare che V_A ha dimensione k e che $V_A \cap W = \underline{0}$.

(ii) Verificare che $\mathbb{R}^n = V_0 \oplus W$. Siano $\pi : \mathbb{R}^n \rightarrow V_0$ e $\rho : \mathbb{R}^n \rightarrow W$ le risultanti proiezioni. Verificare che se $V \in O_W$ allora $\pi|_V \in \text{Iso}(V, V_0)$. Poniamo

$$A_V = \rho \circ (\pi|_V)^{-1}.$$

(iii) Utilizzare (i) e (ii) per determinare le due mappe

$$O_W \rightarrow \text{Hom}(V_0, W), \quad O_W \leftarrow \text{Hom}(V_0, W)$$

una inversa dell'altra.

(iv) Fissando una base in V_0 ed una base in W costruire il secondo isomorfismo $\text{Hom}(V_0, W) \leftrightarrow \mathbb{R}^{k(n-k)}$.

(2.3) Dimostrare che $\{(O_W, \phi)\}$ sono una collezione di carte locali per $G_k(\mathbb{R}^n)$.

Esercizio 7. Sia $E_{k,n}(\mathbb{R}) = \{(p, \underline{v}) \in G_k(\mathbb{R}^n) \times \mathbb{R}^n \mid \underline{v} \in p\}$ e sia $\pi : E_{k,n}(\mathbb{R}) \rightarrow G_k(\mathbb{R}^n)$ l'applicazione $(p, \underline{v}) \rightarrow p$. Dimostrare che $(E_{k,n}(\mathbb{R}), \pi, G_k(\mathbb{R}^n))$ è un fibrato vettoriale reale di rango k e C^∞ .

Esercizio 8. Ripetere gli esercizi 6 e 7 nel caso complesso, dimostrando quindi che $G_k(\mathbb{C}^n)$ è una varietà complessa. Dimostrare che il fibrato universale $E_{k,n}(\mathbb{C})$ è un fibrato *olomorfo*.

Esercizio 9. La mappa di Segre

$$\mu : \mathbb{R}P^n \times \mathbb{R}P^m \longrightarrow \mathbb{R}P^{(n+1)(m+1)-1}$$

è definita come segue:

$$([z_0, \dots, z_n], [w_0, \dots, w_m]) \rightarrow [z_0 w_0, z_0 w_1, z_0 w_m, z_1 w_0, \dots, \dots, z_n w_m].$$

Siano $\pi_1 : \mathbb{R}P^n \times \mathbb{R}P^m \rightarrow \mathbb{R}P^n$ e $\pi_2 : \mathbb{R}P^n \times \mathbb{R}P^m \rightarrow \mathbb{R}P^m$ le due proiezioni.

9.1 Sia $n = m = 1$. Analizzando le funzioni di transizione dimostrare che

$$\mu^*(E_{1,(n+1)(m+1)}(\mathbb{R})) \simeq \pi_1^*(E_{1,n+1}(\mathbb{R})) \otimes \pi_2^*(E_{1,m+1}(\mathbb{R}))$$

9.2 (Facoltativo) Dimostrare questo isomorfismo in generale.