**Corso di Laurea in Fisica. Geometria. a.a. 2023-24.**
**Prof. P. Piazza**

FORME HERMITIANE E SPAZI VETTORIALI HERMITIANI

## 1. Forme hermitiane.

Sia $V$ uno spazio vettoriale su $\mathbb{C}$. Consideriamo un'applicazione

$$h : V \times V \to \mathbb{C}$$

Diremo che $h$ è una forma *sesquilineare* se

- $h(\underline{v} + \underline{v}', \underline{w}) = h(\underline{v}, \underline{w}) + h(\underline{v}', \underline{w})\ \forall \underline{v}, \underline{v}', \underline{w} \in V$
- $h(\underline{v}, \underline{w} + \underline{w}') = h(\underline{v}, \underline{w}) + h(\underline{v}, \underline{w}')\ \forall \underline{v}, \underline{w}, \underline{w}' \in V$
- $h(\lambda\underline{v}, \underline{w}) = \lambda h(\underline{v}, \underline{w})\ \forall \lambda \in \mathbb{C}\ \forall \underline{v}, \underline{w} \in V$
- $h(\underline{v}, \lambda\underline{w}) = \overline{\lambda} h(\underline{v}, \underline{w})\ \forall \lambda \in \mathbb{C}\ \forall \underline{v}, \underline{w} \in V$

dove vi ricordo che per un numero complesso $z = \alpha + i\beta$ si pone $\overline{z} = \alpha - i\beta$ (il *coniugato* di $z$). È ovvio che $\overline{\overline{z}} = z$. Inoltre $z$ è reale se e solo se $z = \overline{z}$.

Una forma sesquilineare $h( \, , \, )$ è detta una **forma hermitiana** se vale in aggiunta

$$h(\underline{w}, \underline{v}) = \overline{h(\underline{v}, \underline{w})} \quad \forall \underline{v}, \underline{w} \in V$$

Notiamo subito che per una forma hermitiana si ha $h(\underline{v}, \underline{v}) \in \mathbb{R}$ (perché $h(\underline{v}, \underline{v}) = \overline{h(\underline{v}, \underline{v})}$).

**Notazione.** Sia $A = (a_{ij}) \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$. Possiamo considerare la matrice ottenuta prendendo il complesso coniugato di ogni $a_{ij}$.

$$\overline{A} := (\overline{a_{ij}}) \in M_{n\times n}(\mathbb{C}).$$

Poniamo

$$A^H := \overline{A}^T.$$

È chiaro che $(A \cdot B)^H = B^H \cdot A^H$.

**Definizione.** Diremo che $A$ è una matrice hermitiana se $A = A^H$. Quindi $A = (a_{ij})$ è hermitiana se e solo se $a_{ji} = \overline{a_{ij}}$. Notare che una matrice hermitiana ha elementi reali sulla diagonale.

**Esempio.** La matrice

$$\begin{vmatrix} 2 & 1+2i \\ 1-2i & \pi \end{vmatrix}$$

è hermitiana.

**Esempio 1.** In $\mathbb{C}^n$ possiamo considerare

$$h(\underline{v}, \underline{w}) := \underline{w}^H \cdot \underline{v} = v_1\overline{w}_1 + \cdots + v_n\overline{w}_n.$$

È facile verificare che $h$ è una forma hermitiana.

**Esempio 2.** In $\mathbb{C}^n$ possiamo considerare

$$h(\underline{v}, \underline{w}) := \underline{w}^H \cdot S \cdot \underline{v}$$

con $S$ una matrice hermitiana, $S^H = S$. È facile verificare, procedendo come nel caso reale e per le forme bilineari simmetriche di $\mathbb{R}^n$, che $h$ è una forma hermitiana.

## 2. Forme hermitiane e matrici.

Sia

$$h : V \times V \to \mathbb{C}$$

una forma sesquilineare. Sia $V$ di dimensione $n$ e $\mathcal{B} := \{\underline{v}_1, \underline{v}_2, \dots, \underline{v}_n\}$ una base di $V$. Rimane allora definita la matrice associata a $h( \, , \, )$ nella base fissata; per definizione questa è la matrice $n \times n$

$$A_h^{\mathcal{B}} \equiv (a_{ij}) := (h(\underline{v}_j, \underline{v}_i)) \, .$$

L'espressione della forma sesquilineare nelle coordinate associate a $\mathcal{B} = \{\underline{v}_1, \underline{v}_2, \dots, \underline{v}_n\}$ è data da

$$(1) \;\; b(x_1\underline{v}_1 + \dots + x_n\underline{v}_n \, , \, y_1\underline{v}_1 + \dots + y_n\underline{v}_n) = |\overline{y_1}, \dots, \overline{y_n}| \cdot A_h^{\mathcal{B}} \cdot \begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{vmatrix} = \underline{y}^H \cdot A_h^{\mathcal{B}} \cdot \underline{x}$$

La verifica di quest'espressione è diretta, usando le quattro proprietà nella definizione di $h$ e ricordando la definizione di prodotto righe per colonne. Per semplificare la notazione scriveremo semplicemente $\underline{y}^H \, A_h^{\mathcal{B}} \, \underline{x}$ (omettendo i punti centrali)
Quindi:

$$(2) \qquad h(\underline{v}, \underline{w}) = \underline{y}^H \, A_h^{\mathcal{B}} \, \underline{x}$$

se $\underline{v}$ ha coordinate $\underline{x}$ e $\underline{w}$ ha coordinate $\underline{y}$ nella base fissata. La (2) è l'*espressione della forma sesquilineare* $h( \, , \, )$ *nelle coordinate associate a* $\mathcal{B}$ .

Notiamo che per ogni matrice quadrata $A \in M_{n \times n}(\mathbb{C})$ si ha

$$(3) \qquad \underline{y}^H A \underline{x} = \underline{x}^T \, A^T \, \overline{\underline{y}} \, ;$$

infatti $\underline{y}^H A \underline{x}$ è una matrice $1 \times 1$ e quindi $\underline{y}^H A \underline{x} = (\underline{y}^H A \underline{x})^T$ da cui

$$\underline{y}^H A \underline{x} = \underline{x}^T A^T (\underline{y}^H)^T = \underline{x}^T A^T (\overline{\underline{y}}^T)^T = \underline{x}^T A^T \overline{\underline{y}}$$

come si voleva. Vediamo allora che *$h$ è hermitiana se e solo se $A_h^{\mathcal{B}}$ è hermitiana*: infatti, scrivendo l'espressione della forma sesquilineare in coordinate otteniamo

$$h(\underline{w}, \underline{v}) = \underline{x}^H \, A_h^{\mathcal{B}} \, \underline{y}$$

e questa espressione è uguale a

$$\overline{\underline{x}^T (A_h^{\mathcal{B}})^T \overline{\underline{y}}} \quad \text{(che per (2) e (3) è uguale a } \overline{h(\underline{v}, \underline{w})})$$

se e solo se

$$\underline{x}^H \, A_h^{\mathcal{B}} \, \underline{y} = \overline{\underline{x}^T (A_h^{\mathcal{B}})^T \overline{\underline{y}}}$$

se e solo se

$$\underline{x}^H \, A_h^{\mathcal{B}} \, \underline{y} = \overline{\underline{x}}^T \overline{(A_h^{\mathcal{B}})}^T \, \underline{y}$$

se e solo se

$$\underline{x}^H \, A_h^{\mathcal{B}} \, \underline{y} = \underline{x}^H (A_h^{\mathcal{B}})^H \underline{y}.$$

Dato che questo è vero per ogni $\underline{x} \in \mathbb{C}^n$ ed ogni $\underline{y} \in \mathbb{C}^n$, otteniamo infine che $h$ è hermitiana se e solo se $A_h^{\mathcal{B}} = (A_h^{\mathcal{B}})^H$.

Una forma hermitiana è anche detta un *prodotto scalare hermitiano* e spesso denotata con $<\,,\,>$.

D'ora in avanti ci concentreremo sulle forme hermitiane.

Il nucleo (o *radicale*) di una forma hermitiana è il sottospazio $V^\perp$ di $V$ costituito dai vettori $\underline{w} \in V$ tali che $h(\underline{w}, \underline{v}) = 0\ \forall \underline{v} \in V$. Una forma hermitiana è degenere se $V^\perp$ è non-banale.

Sia $\mathcal{B} := \{\underline{v}_1, \underline{v}_2, \dots, \underline{v}_n\}$ una base di $V$ e sia $F_{\mathcal{B}} : V \to \mathbb{C}^n$ l'isomorfismo dato dalle coordinate in questa base.. Sia $A_h^{\mathcal{B}}$ la matrice associata a questa forma hermitiana in questa base $\mathcal{B}$. Non è difficile verificare la validità della seguente

**Proposizione.** *L'immagine del nucleo di $h(\,,\,)$ tramite $F_{\mathcal{B}}$ è uguale al nucleo della matrice $A_h^{\mathcal{B}}$.*
*In particolare: $h(\,,\,)$ è non-degenere se e solo se $A_h^{\mathcal{B}}$ è non-singolare se e solo se $\det(A_h^{\mathcal{B}}) \neq 0$.*

## 3. Cambiamenti di base

Sia $\mathcal{F} = \{\underline{f}_1, \dots, \underline{f}_n\}$ un'altra base di $V$. Sia $A_h^{\mathcal{F}}$ la matrice associata a $h(\,,\,)$ in questa base. Il vettore generico $\underline{v}$ ha coordinate $(x_1, \dots, x_n)$ nella base $\mathcal{B}$ e coordinate $(x'_1, \dots, x'_n)$ nella base $\mathcal{F}$. Analogamente $\underline{w}$ ha coordinate $(y_1, \dots, y_n)$ nella base $\mathcal{B}$ e coordinate $(y'_1, \dots, y'_n)$ nella base $\mathcal{F}$. Sia $C$ la matrice del cambiamento di base, dalla base $\mathcal{B}$ alla base $\mathcal{F}$. Vi ricordo, che questa è la matrice invertibile che ha come j-ma colonna le coordinate di $\underline{f}_j$ nella base $\mathcal{B}$; abbiamo denotato questa matrice con il simbolo $M_{\mathcal{B},\mathcal{F}}(\mathrm{Id}_V)$. Procedendo come nel caso delle forme bilineari simmetriche si ha la **formula magica**

$$A_h^{\mathcal{F}} = C^H\, A_h^{\mathcal{B}}\, C\,. \qquad \text{con } C = M_{\mathcal{B},\mathcal{F}}(\mathrm{Id}_V)\,. \tag{4}$$

per le matrici associate ad una stessa forma hermitiana in basi diverse.

**Definizione.** *Due matrici complesse $A$ e $D$ sono dette* **congruenti su** $\mathbb{C}$ *se esiste una matrice invertibile $C$ tale che $D = C^H AC$.*

Abbiamo dimostrato la seguente :

**Proposizione.** *Se $A$ e $D$ sono le matrici associate ad una forma hermitiana $h(\,,\,)$ in due basi diverse allora esse sono congruenti su $\mathbb{C}$.*

Procedendo come nel caso reale non è difficile dimostrare quanto segue [1]

**Proposizione.** *Se $A$ e $D$ sono matrici complesse congruenti su $\mathbb{C}$ allora esse hanno lo stesso rango.*

**Definizione.** *Il rango di una forma hermitiana $h(\,,\,)$ è il rango di $A_h^{\mathcal{B}}$ con $\mathcal{B}$ una qualsiasi base di $V$. La definizione è ben posta per quanto appena visto.*

[1] Notare che $\det(C^H) = \overline{\det(C)}$ e quindi ragionando come nel caso reale $\mathrm{rg}(C^H A) = \mathrm{rg}(A)$ se $C$ è invertibile.

## 4. Prodotti hermitiani definiti positivi.

Supponiamo che $V$ sia uno spazio vettoriale complesso. Sia $h$ una forma hermitiana. Sappiamo che $h(\underline{v}, \underline{v}) \in \mathbb{R}$. Una forma hermitiana è definita positiva se $h(\underline{v}, \underline{v}) > 0$ per ogni vettore non-nullo $\underline{v}$. Si utilizza spesso la notazione $<\,,\,>$ invece di $h(\,,\,)$.
Possiamo anche dare, esattamente come per le forme bilineari simmetriche, la definizione di forma hermitiana semidefinita positiva, (semi)definita negativa, indefinita.

La coppia $(V, <\,,\,>)$, con $<\,,\,>$ un prodotto scalare hermitiano *definito positivo*, è per definizione uno **spazio vettoriale hermitiano**.

La nozione di ortogonalità e di norma

$$\|\underline{v}\| = \sqrt{<\underline{v}, \underline{v}>}$$

vengono date come nel caso degli spazi vettoriali metrici nel caso reale. Abbiamo anche

- la nozione di spazio ortogonale $U^\perp$ se $U \leq V$;
- la decomposizione in somma diretta $V = U \oplus U^\perp$ se $U \leq V$;
- la nozione di base ortonormale;
- il procedimento di ortogonalizzazione di Gram-Schmidt;
- la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz: $|<\underline{v}, \underline{w}>| \leq \|\underline{v}\|\|\underline{w}\|$ e l'uguaglianza vale se e solo se $\underline{v}$ e $\underline{w}$ sono linearmente dipendenti;
- la disuguaglianza triangolare.

**Esempio.** In $\mathbb{C}^n$ possiamo considerare il prodotto hermitiano canonico

$$<\underline{v}, \underline{w}> = \underline{w}^H \cdot \underline{v} = v_1\overline{w}_1 + \cdots + v_n\overline{w}_n.$$

Si ha

$$<\underline{v}, \underline{v}> = v_1\overline{v}_1 + \cdots + v_n\overline{v}_n = |v_1|^2 + \cdots + |v_n|^2$$

e quindi il prodotto hermitiano canonico è definito positivo.

**Cambiamento di base ortonormale.** Sia $\mathcal{B}$ una base ortonormale in uno spazio vettoriale hermitiano $(V, <\,,\,>)$. Si ha allora $A^{\mathcal{B}}_{<\,,\,>} = I_n$. Sia $\mathcal{F}$ una seconda base Assumiamo che $\mathcal{F}$ sia anche ortonormale. Si ha allora $A^{\mathcal{F}}_{<\,,\,>} = I_n$. Riassumendo,

$$A^{\mathcal{B}}_{<\,,\,>} = I_n\,, \quad A^{\mathcal{F}}_{<\,,\,>} = I_n\,.$$

La formula magica (4) ci dice che

$$A^{\mathcal{F}}_{<\,,\,>} = C^H\, A^{\mathcal{B}}_{<\,,\,>}\, C\,. \qquad \text{con } C = M_{\mathcal{B},\mathcal{F}}(\mathrm{Id}_V)$$

e quindi $M_{\mathcal{B},\mathcal{F}}(\mathrm{Id}_V)$, la matrice del cambiamento di base, verifica

$$I_n = ((M_{\mathcal{B},\mathcal{F}}(\mathrm{Id}_V))^H\, I_n\, M_{\mathcal{B},\mathcal{F}}(\mathrm{Id}_V)$$

e cioè

$$I_n = (M_{\mathcal{B},\mathcal{F}}(\mathrm{Id}_V))^H M_{\mathcal{B},\mathcal{F}}(\mathrm{Id}_V)$$

Abbiamo quindi dimostrato la seguente

**Proposizione.** Sia $\mathcal{B}$ una base ortonormale di $(V, <\,,\,>)$. Sia $\mathcal{F}$ una seconda base ortonormale. Sia $B$ la matrice del cambiamento di base, da $\mathcal{B}$ a $\mathcal{F}$: $B = M_{\mathcal{B},\mathcal{F}}(\mathrm{Id}_V)$. Allora $B^H B = I_n$

## 5. Gruppo Unitario

**Definizione.** *Sia* $U(n) := \{A \in M_{n,n}(\mathbb{C}) \mid A^H A = I_n\}$*. Le matrici di* $U(n)$ *sono dette unitarie.*

Notiamo che $U(n) = \{A \in GL_n(\mathbb{C}) \mid A^{-1} = A^H\}$, infatti $|\det A|^2 = 1$ (dato che per le proprietà del coniugio e per Binet si ha $\det(A^H A) = \overline{\det A} \det A = 1$) da cui $U(n) \subset GL_n(\mathbb{C})$; quindi le matrici unitarie sono invertibili. Inoltre essendo per definizione $A^H A = I_n$ si deve avere, moltiplicando a destra ambo i membri per $A^{-1}$, $A^H = A^{-1}$ che è quello che avevamo enunciato.

Possiamo rienunciare la Proposizione precedente nel modo seguente:

**Proposizione.** Sia $\mathcal{B}$ una base ortonormale di $(V, <\,,\,>)$. Sia $\mathcal{F}$ una seconda base ortonormale. Sia $B$ la matrice del cambiamento di base, da $\mathcal{B}$ a $\mathcal{F}$. Allora $B \in U(n)$.

Come per $O(n)$ si ha:

**Proposizione 4.** $U(n)$ con il prodotto righe per colonne è un sottogruppo di $GL_n(\mathbb{C})$, detto *gruppo unitario.*

*Dimostrazione.* Dobbiamo dimostrare che il prodotto righe per colonne di due matrici unitarie è ancora una matrice unitaria e che l'inversa di una matrice unitaria è unitaria. Se $A, B \in U(n)$ allora $(AB)^H AB = B^H A^H AB = B^H I_n B = B^H B = I_n$; quindi $AB \in U(n)$ come volevasi. Inoltre, se $A \in U(n)$ allora $A^H = A^{-1}$ e quindi $(A^H)^{-1} = (A^{-1})^{-1} (= A)$; dato che $(A^H)^{-1} = (A^{-1})^H$ abbiamo in definitiva $(A^{-1})^H = (A^{-1})^{-1}$ e cioè $A^{-1} \in U(n)$ come dovevamo dimostrare.

Il sottoinsieme $SU(n) = \{A \in U(n) \mid \det A = 1\}$ è anche un sottogruppo di $GL_n(\mathbb{C})$, detto *gruppo unitario speciale.*

## 6. Il teorema spettrale per operatori hermitiani

Sia $V$ uno spazio vettoriale complesso e supponiamo che sia definito in $V$ un prodotto scalare hermitiano definito positivo $<\,,\,>$. La coppia $(V, <\,,\,>)$ è quindi uno spazio vettoriale hermitiano.

**Definizione.** Sia $T : V \to V$ un endomorfismo. Diremo che $T$ è hermitiano se

$$< T\underline{v}, \underline{w} > = < \underline{v}, T\underline{w} > \quad \forall \underline{v}, \underline{w} \in V$$

**Esempio 1.** Sia $V = \mathbb{C}^n$ con il prodotto hermitiano canonico $<\,,\,>$:

$$< \underline{x}, \underline{y} > := \underline{y}^H \cdot \underline{x}\,.$$

Sia $A$ una matrice hermitiana . Allora $L_A : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ è un operatore hermitiano per lo spazio vettoriale hermitiano $(\mathbb{C}^n, <\,,\,>)$. Infatti

$$< L_A\underline{x}, \underline{y} > = \underline{y}^H \cdot (L_A\underline{x}) = \underline{y}^H \cdot (A \cdot \underline{x}) = (\underline{y}^H \cdot A) \cdot \underline{x} = (A \cdot \underline{y})^H \cdot \underline{x} = < \underline{x}, L_A\underline{y} >$$

dove nella terza uguaglianza abbiamo applicato l'associatività e nella quarta uguaglianza abbiamo applicato la nota formula $(C \cdot D)^H = D^H \cdot C^H$ e l'ipotesi $A = A^H$.

Torniamo al caso generale di uno spazio vettoriale hermitiano $(V, <\,,\,>)$ di dimensione finita uguale ad $n$. La seguente proposizione si dimostra in maniera analoga alla corrispondente proposizione per gli operatori simmetrici nel caso reale.

**Proposizione.** *$T$ è hermitiano se e solo se la matrice associata a $T$ in una base ortonormale, $A$, è hermitiana.*

**Proposizione.** *Sia $T$ hermitiano. Allora lo spettro di $T$ è contenuto in $\mathbb{R}$.*
**Dimostrazione.** Sia $T$ hermitiano. Dato che in $\mathbb{C}$ vale il teorema fondamentale dell'algebra, sappiamo che $T$ ammette $n$ autovalori complessi contati con molteplicità. Vogliamo vedere che sono reali. Sia $\lambda$ un autovalore e sia $\underline{v} \neq \underline{0}$ un autovettore associato a tale autovalore. Allora da una parte $< T\underline{v}, \underline{v} >= \lambda \|\underline{v}\|^2$ e dall'altra, dato che $T$ è hermitiano,

$$< T\underline{v}, \underline{v} >=< \underline{v}, T\underline{v} >=< \underline{v}, \lambda\underline{v} >= \overline{\lambda} < \underline{v}, \underline{v} >= \overline{\lambda}\|\underline{v}\|^2$$

e quindi

$$(\lambda - \overline{\lambda})\|\underline{v}\|^2 = 0$$

da cui $\lambda - \overline{\lambda} = 0$ e cioè $\lambda \in \mathbb{R}$.

Si ha infine, con dimostrazione identica a quella del caso simmetrico,

**Proposizione.** *Sia $T$ hermitiano. Allora autovettori associati ad autovalori distinti sono* **ortogonali**.

**Teorema spettrale per operatori hermitiani.**
*Sia $(V, < , >)$ uno spazio vettoriale hermitiano di dimensione finita. Sia $T : V \to V$ un operatore hermitiano. Allora esiste una base ortonormale di $V$ costituita da autovettori di $T$.*

**Dimostrazione.** Per induzione su $n = \dim V$. Per $n = 1$ non c'è nulla da dimostrare. Supponiamo vero il teorema per spazi vettoriali hermitiani di dimensione $n-1$ e dimostriamolo per quelli di dimensione $n$. Dato che siamo nel caso complesso sappiamo che esiste un autovalore per $T$, sia esso $\lambda$; sia $\underline{e}_1$ un autovettore associato a tale autovalore. Possiamo assumere che $||\underline{e}_1|| = 1$ perché se cosi' non fosse possiamo sempre normalizzare l'autovettore. Consideriamo ora $W = (\mathbb{C}\underline{e}_1)^{\perp}$.
*Osservazione fondamentale:* il sottospazio $W$ è invariante per $T$; questo vuol dire, per definizione, che $T(W)$ è contenuto in $W$. Dimostriamo questa proprietà fondamentale:
sia $\underline{w} \in W$; dobbiamo verificare che $T\underline{w} \in W$ e cioè che $< T\underline{w}, \underline{e}_1 >= 0$; ma $< T\underline{w}, \underline{e}_1 >=< \underline{w}, T\underline{e}_1 >$ per l'ipotesi che $T$ è hermitiano e $T\underline{e}_1 = \lambda\underline{e}_1$ perché $\underline{e}_1$ è un autovettore associato a $\lambda$; quindi $< T\underline{w}, \underline{e}_1 >= \overline{\lambda} < \underline{w}, \underline{e}_1 >$ che è uguale a zero dato che $\underline{w} \in W = (\mathbb{C}\underline{e}_1)^{\perp}$. Quindi $W$ è invariante. Ha senso quindi considerare la restrizione di $T$ a questo sottospazio

$$T|_W : W \to W\,;$$

questo è quindi un endomorfismo dello spazio vettoriale $W$ ed è bene notare che $W$ ha dimensione $n-1$ con $n = \dim V$. Il prodotto hermitiano $< , >$ definisce per restrizione un'applicazione $W \times W \to \mathbb{C}$ che è ovviamente ancora un prodotto scalare hermitiano definito positivo. $W$ è quindi esso stesso uno spazio vettoriale hermitiano; l'operatore $T|_W : W \to W$ è ovviamente hermitiano rispetto a questo prodotto scalare in $W$ [2]. Ma $W$ ha dimensione $n-1$ e quindi, per ipotesi induttiva, $W$ ammette una base ortonormale $\underline{e}_2, \ldots, \underline{e}_n$ costituita da autovettori per $T|_W$; è ora chiaro che $\underline{e}_1, \underline{e}_2, \ldots, \underline{e}_n$ è una base ortonormale di $V$ costituita da autovettori per $T$. Il teorema è dimostrato.

[2] la formula $< T\underline{v}\,\underline{w} >=< \underline{v}, T\underline{w} >$ è verificata *per ogni* $\underline{v}, \underline{w} \in V$, in particolare per i vettori di $W$ !

**Esercizio.** *Sia* $V = \mathbb{C}^2$ *con prodotto hermitiano canonico. Sia* $T : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ *l'operatore* $L_A$ *con*

$$A = \begin{vmatrix} 2 & 1+i \\ 1-i & 0 \end{vmatrix}$$

**1.** *Spiegare perché* $T$ *è diagonalizzabile con base diagonalizzante ortonormale.*
**2.** *Determinare una base ortonormale di* $\mathbb{C}^2$ *costituita da autovettori di* $T$.
**3.** *Stabilire se tale base è unica.*
**4.** *Determinare una matrice unitaria* $U$ *ed una matrice diagonale* $\Delta$ *tali che* $U^{-1}AU = \Delta$

**Soluzione.**
**1.** L'operatore è hermitiano, dato che $A = A^H$ e dato che stiamo considerando il prodotto hermitiano canonico di $\mathbb{C}^2$ e la base canonica che è quindi ortonormale. Per il teorema spettrale per gli operatori hermitiani sappiamo che esiste una base ortonormale di $\mathbb{C}^2$ costituita da autovettori di $T$.
**2.** Il polinomio caratteristico di $T$ è $\lambda^2 - 2\lambda - 2$ che ha radici $1 \pm \sqrt{3}$. Sappiamo che ad autovalori distinti corrispondono autovettori ortogonali. Per determinare una base ortonormale di autovettori basterà allora trovare generatori di norma uno delle rette $V_T(1+\sqrt{3})$ e $V_T(1-\sqrt{3})$. Si ha

$$V_T(1+\sqrt{3}) = \{\underline{z} \in \mathbb{C}^2 \mid (A-(1+\sqrt{3})I)\underline{z} = \underline{0}\} = \{\underline{z} \in \mathbb{C}^2 \mid (1-\sqrt{3})z_1+(1+i)z_2 = 0\}$$

da cui $V_T(1+\sqrt{3}) = \mathbb{C}((1+i),(-1+\sqrt{3}))$. Dato che $V_T(1-\sqrt{3}) = (V_T(1+\sqrt{3}))^\perp$ e dato che

$$(\mathbb{C}((1+i),(-1+\sqrt{3})))^\perp = \mathbb{C}(-(-1+\sqrt{3}), \overline{(1+i)})$$

otteniamo immediatamente che $V_T(1-\sqrt{3}) = \mathbb{C}((1-\sqrt{3}),(1-i))$. Normalizzando otteniamo la base ortonormale di autovettori:

$$\underline{u}_1 = \left( \frac{(1+i)}{\sqrt{6-2\sqrt{3}}}, \frac{(-1+\sqrt{3})}{\sqrt{6-2\sqrt{3}}} \right), \quad \underline{u}_2 = \left( \frac{(1-\sqrt{3})}{\sqrt{6-2\sqrt{3}}}, \frac{(1-i)}{\sqrt{6-2\sqrt{3}}} \right)$$

**3.** Tale base non è unica: basta considerare la base $\{\underline{u}_2, \underline{u}_1\}$ oppure osservare che per ogni retta ci sono due generatori di norma 1.
**4.** La matrice $U$ è la matrice che ha come colonne le coordinate della base trovata in **2**. La matrice $\Delta$ è la matrice diagonale che ha gli autovalori $1+\sqrt{3}$ e $1-\sqrt{3}$ ai posti $d_{11}$ e $d_{22}$ rispettivamente.

## 7. Il teorema di Sylvester

In maniera analoga al caso delle forme bilineari simmetriche, si può utilizzare il teorema spettrale per operatori hermitiani per dimostrare il seguente importante risultato di diagonalizzazione per le forme hermitiane.

**Teorema (Sylvester)** *Sia* $h( , )$ *una forma hermitiana su uno spazio vettoriale complesso* $V$ *di dimensione* $n$. *Sia* $r$ *il rango di* $h( , )$. *Allora esiste un intero positivo* $\rho$, *dipendente solo da* $h( , )$, *ed una base* $\mathcal{F}$ *tali che*

$$A_b^{\mathcal{F}} = \begin{vmatrix} I_\rho & 0 & 0 \\ 0 & -I_{r-\rho} & 0 \\ 0 & 0 & 0_{n-r} \end{vmatrix}.$$

*I numeri* $\rho$, $r-\rho$ *e* $n-r$ *sono detti rispettivamente, indice di positività, indice di negatività ed indice di nullità della forma hermitiana* $b( , )$. *La base* $\mathcal{F}$ *è, per definizione,* **una base di Sylvester.**

**Esercizio.** Scrivete una dimostrazione dettagliata di questo Teorema.

## 8. Operatori Ortogonali ed Operatori Unitari

Sia $(V, <\,,\,>)$ uno spazio vettoriale metrico **reale**. Un operatore $T : V \to V$ è un **operatore ortogonale** (o isometria lineare) se vale una delle seguenti equivalenti condizioni:

(1) $< T\underline{v}, T\underline{w} >=< \underline{v}, \underline{w} >$ $\forall \underline{v}, \underline{w} \in V$ ($T$ preserva il prodotto scalare definito positivo in $V$)
(2) $\|T\underline{v}\| = \|\underline{v}\|$ $\forall \underline{v} \in V$ ($T$ preserva la norma)
(3) $T$ trasforma basi ortonormali in basi ortonormali

La dimostrazione che queste 3 condizioni sono equivalenti non è difficile. Vediamola.
(1) $\Rightarrow$ (2) è chiaro (basta scegliere $\underline{w} = \underline{v}$)
(2) $\Rightarrow$ (1) segue dall'identità, già vista, $< \underline{f}, \underline{g} >= \frac{1}{4}\left[\|\underline{f}+\underline{g}\|^2 - \|\underline{f}-\underline{g}\|^2\right]$; quindi, in dettaglio,

$$< T\underline{v}, T\underline{w} >= \frac{1}{4}\left[\|T\underline{v}+T\underline{w}\|^2 - \|T\underline{v}-T\underline{w}\|^2\right]$$

$$= \frac{1}{4}\left[\|T(\underline{v}+\underline{w})\|^2 - \|T(\underline{v}-\underline{w})\|^2\right] = \frac{1}{4}\left[\|\underline{v}+\underline{w}\|^2 - \|\underline{v}-\underline{w}\|^2\right] =< \underline{v}, \underline{w} >$$

(1) $\Rightarrow$ (3) è chiara: se $< \underline{v}_i, \underline{v}_j >= \delta_{ij}$ allora, se è vera (1), si ha anche $< T(\underline{v}_i), T(\underline{v}_j) >= \delta_{ij}$.
(3) $\Rightarrow$ (1): se $\mathcal{B} = \{\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_n\}$ è una base ortonormale allora sappiamo che se $\underline{v}$ ha coordinate $\underline{x}$ in $\mathcal{B}$ e $\underline{w}$ ha coordinate $\underline{y}$ in $\mathcal{B}$ allora $< \underline{v}, \underline{w} >= \underline{x} \bullet \underline{y}$. Per ipotesi $\{T(\underline{v}_1), \ldots, T(\underline{v}_n)\}$ è una base ortonormale. Ma, per linearità, $T(\underline{v}) = x_1 T(\underline{v}_1) + \cdots + x_n T(\underline{v}_n)$; quindi $\underline{x}$ sono le coordinate di $T(\underline{v})$ nella base $\{T(\underline{v}_1), \ldots, T(\underline{v}_n)\}$ e analogamente $\underline{y}$ sono le coordinate di $T(\underline{w})$ nella base $\{T(\underline{v}_1), \ldots, T(\underline{v}_n)\}$. Dato che questa base è ortonormale si ha, come sempre, $< T(\underline{v}), T(\underline{w}) >= \underline{x} \bullet \underline{y}$. Ma allora $< T(\underline{v}), T(\underline{w}) >=< \underline{v}, \underline{w} >$ dato che sono entrambi uguali a $\underline{x} \bullet \underline{y}$.
Abbiamo dimostrato l'equivalenza delle tre condizioni.

Dalla seconda condizione capiamo subito che un operatore ortogonale è iniettivo e quindi **bigettivo**.

**Proposizione.** Fissata una base ortonormale $\mathcal{B} = \{\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_n\}$ si ha che $T$ è ortogonale se e solo se $A := M_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(T) \in O(n)$, con $n = \dim V$.

**Dimostrazione.** Dato che $\mathcal{B}$ è ortonormale si ha che

$$< \underline{v}, \underline{w} >= \underline{y}^T \cdot \underline{x}$$

se $\underline{v}$ ha coordinate $\underline{x}$ e $\underline{w}$ ha coordinate $\underline{y}$. Ma allora

$$< T\underline{v}, T\underline{w} >=< \underline{v}, \underline{w} > \;\; \forall \underline{v}, \underline{w} \in V \Leftrightarrow (A \cdot \underline{y})^T \cdot (A \cdot \underline{x}) = \underline{y}^T \cdot \underline{x} \quad \forall \underline{x}, \underline{y} \in \mathbb{R}^n$$

e ciò è vero se e solo se

$$\underline{y}^T \cdot A^T \cdot A \cdot \underline{x} = \underline{y}^T \cdot I_n \cdot \underline{x} \quad \forall \underline{x}, \underline{y} \in \mathbb{R}^n$$

che è vero se e solo se $A^T \cdot A = I_n$.

In generale un operatore ortogonale può non ammettere autovalori reali, si pensi ad esempio ad una rotazione di un angolo $\theta \in (0, \pi)$ in $\mathbb{R}^2$ con prodotto scalare canonico. Tuttavia se $\lambda \in \mathbb{R}$ è un autovalore, allora $\lambda = \pm 1$ perché se $\lambda$ è un autovalore con autovettore $\underline{v} \neq \underline{0}$ allora

$$< \underline{v}, \underline{v} >=< T\underline{v}, T\underline{v} >=< \lambda\underline{v}, \lambda\underline{v} >= \lambda^2 < \underline{v}, \underline{v} >$$

da cui $\lambda^2 = 1$.

Sia ora $(V, < , >)$ uno spazio vettoriale **hermitiano** e sia $T : V \to V$ un endormorfismo. Diremo che $T$ è **unitario** se è soddisfatta una delle seguenti equivalenti condizioni

(1) $< T\underline{v}, T\underline{w} >=< \underline{v}, \underline{w} > \forall \underline{v}, \underline{w} \in V$
(2) $\|T\underline{v}\| = \|\underline{v}\| \; \forall \underline{v} \in V$
(3) $T$ trasforma basi ortonormali in basi ortonormali

La dimostrazione dell'equivalenza è identica a quella reale. Abbiamo poi

**Proposizione.** Fissata una base ortonormale $\mathcal{B}$ si ha che $T$ è unitario se e solo se $M_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(T) \in U(n)$, con $n = \dim V$.
**Dimostrazione.** Dato che $\mathcal{B}$ è ortonormale si ha che $< \underline{v}, \underline{w} >= \underline{y}^H \cdot \underline{x}$ se $\underline{v}$ ha coordinate $\underline{x}$ e $\underline{w}$ ha coordinate $\underline{y}$. Ma allora

$$< T\underline{v}, T\underline{w} >=< \underline{v}, \underline{w} > \; \forall \underline{v}, \underline{w} \in V \Leftrightarrow (A \cdot \underline{y})^H \cdot (A \cdot \underline{x}) = \underline{y}^H \cdot \underline{x} \quad \forall \underline{x}, \underline{y} \in \mathbb{C}^n$$

e ciò è vero se e solo se

$$\underline{y}^H \cdot A^H \cdot A \cdot \underline{x} = \underline{y}^H \cdot \underline{x} \quad \forall \underline{x}, \underline{y} \in \mathbb{C}^n$$

che è vero se e solo se $A^H \cdot A = I_n$.

Abbiamo poi:

**Proposizione.** Sia $T$ unitario e sia $\lambda \in \mathbb{C}$ un autovalore, allora $|\lambda| = 1$.
**Dimostrazione.** Se $\lambda \in \mathbb{C}$ è un autovalore con autovettore $\underline{v} \neq \underline{0}$ allora

$$< \underline{v}, \underline{v} >=< T\underline{v}, T\underline{v} >=< \lambda\underline{v}, \lambda\underline{v} >= \lambda\overline{\lambda} < \underline{v}, \underline{v} >$$

da cui $|\lambda| = 1$.

Vale infine il
**Teorema spettrale per operatori unitari.** Sia $T : V \to V$ unitario. Allora esiste una base ortonormale di $V$ costituita da autovettori di $T$.
**Dimostrazione.** Procediamo per induzione sulla dimensione, come per gli altri due teoremi spettrali. Siamo nel caso complesso e quindi esiste certamente un autovalore $\lambda$ e sappiamo che $\lambda \neq 0$ (infatti $|\lambda| = 1$). Sia $\underline{v}_1 \neq \underline{0}$ un autovettore associato a $\lambda$ e consideriamo $W = (\mathbb{C}\underline{v}_1)^\perp$. Basta dimostrare che $W$ è invariante per $T$: $T(W) \subset W$. Sia $\underline{w} \in W$; quindi $< \underline{w}, \underline{v}_1 >= 0$ Dobbiamo dimostrare che $T\underline{w} \in W$ e cioè che $< T\underline{w}, \underline{v}_1 >= 0$. Ma si ha

$$< T\underline{w}, \underline{v}_1 >=< T\underline{w}, \lambda^{-1}\lambda\underline{v}_1 >=$$

$$\overline{\lambda^{-1}} < T\underline{w}, \lambda\underline{v}_1 >= \overline{\lambda^{-1}} < T\underline{w}, T\underline{v}_1 >= \overline{\lambda^{-1}} < \underline{w}, \underline{v}_1 >= 0.$$

Il resto della dimostrazione procede come per la dimostrazione del teorema spettrale per operatori simmetrici e per operatori hermitiani.

## 9. Spazi di Hilbert

La nozione di spazio vettoriale metrico (nel caso reale) e di spazio vettoriale hermitiano (nel caso complesso) si estendono in maniera naturale a spazi vettoriali di dimensione infinita. Soprattutto in questo contesto infinito-dimensionale sono detti **spazi pre-hilbertiani**. In Meccanica Quantistica sono molto importanti gli **spazi di Hilbert**. Vediamo la definizione.
Abbiamo visto che uno spazio pre-hilbertiano $(V, < \, , >)$ definisce uno spazio normato che a sua volta definisce uno spazio metrico $(V, d(\, , \,))$, con funzione distanza data da

$$d(\underline{v}, \underline{w}) := \|\underline{w} - \underline{v}\| (\equiv \|\underline{v} - \underline{w}\|)$$

In uno spazio metrico $(X, d_X(\, , \,))$ possiamo dare la definizione di limite di una successione:
*diremo che la successione* $\{x_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ *in* $X$ *converge a* $p \in X$ *se* $\forall \epsilon > 0$ *esiste* $N(\epsilon) \in \mathbb{N}$ *tale che* $d_X(x_i, p) < \epsilon$ *per ogni* $i > N(\epsilon)$.
Possiamo anche dare la definizione di successione di Cauchy:
*una successione* $\{x_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ *in* $X$ *è di Cauchy se* $\forall \epsilon > 0$ *esiste* $N(\epsilon) \in \mathbb{N}$ *tale che* $d_X(x_i, x_j) < \epsilon$ *per ogni* $i, j > N(\epsilon)$.
Avete visto questa definizione nel corso di Analisi per lo spazio metrico $(\mathbb{R}, d_{\mathbb{R}}(\, , \,))$ con $d_{\mathbb{R}}(x, y) := |x - y|$. In quel contesto avete anche dimostrato che viceversa ogni successione di Cauchy in $\mathbb{R}$ è convergente.

**Definizione.** Uno spazio metrico $(X, d_X(\, , \,))$ è detto **completo** se ogni successione di Cauchy è convergente.

**Definizione.** Uno spazio pre-hilbertiano $(V, < \, , >)$ è uno spazio di Hilbert se lo spazio metrico $(V, d(\, , \,))$, con $d(\underline{v}, \underline{w}) := \|\underline{w} - \underline{v}\|$, è completo.

**Esempio.** $\mathbb{R}^n$ e $\mathbb{C}^n$ con i loro prodotti scalari canonici sono spazi di Hilbert (la dimostrazione è simile a quella che avete visto ad Analisi).

**Esempio.** Lo spazio delle successioni di numeri reali a quadrato sommabile:

$$\ell^2(\mathbb{R}) = \left\{ \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}, x_i \in \mathbb{R} \;\middle|\; \sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^2 < \infty \right\}$$

dotato del prodotto scalare definito positivo:

$$\langle \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \, , \, \{y_n\}_{n\in\mathbb{N}} \rangle = \sum_{k=1}^{\infty} x_k y_k$$

è uno spazio di Hilbert di dimensione infinita. Lo stesso vale per l'analogo complesso:

$$\ell^2(\mathbb{C}) = \left\{ \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}, x_i \in \mathbb{C} \;\middle|\; \sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^2 < \infty \right\}$$

dotato del prodotto scalare hermitiano definito positivo:

$$\langle \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \, , \, \{y_n\}_{n\in\mathbb{N}} \rangle = \sum_{k=1}^{\infty} x_k \overline{y_k}.$$

La dimostrazione di questi fatti è omessa.