Corso di Laurea Magistrale a.a. 2017-18
Geometria Superiore
Compito a casa del 30/5/2018 (settimo ed ultimo compito)

Esercizio 1. Sia E un fibrato vettoriale hermitiano su una varietà riemanniana (M, g). Denotiamo con $(\cdot|\cdot)_E$ il prodotto scalare L^2:

$$(s|s')_E = \int_M < s, s' >_E \, d\mathrm{vol}_g \,, \quad s, s' \in C^\infty(M, E)$$

Sia F un secondo fibrato vettoriale hermitiano, con metrica hermitiana $< \cdot, \cdot > F$. Sia $P : C^\infty(M, E) \to C^\infty(M, F)$ un operatore differenziale di ordine k. Verificare che esiste unico l'operatore differenziale di ordine k, $P^* : C^\infty(M, F) \to C^\infty(M, E)$, tale che

$$(Ps|s')_F = (s|P^* s')_E \;\; \forall s \in C^\infty(M, E), \forall s' \in C^\infty(M, F) \,.$$

Esercizio 2. Sia $P : C^\infty(M, E) \to C^\infty(M, F)$ un operatore differenziale di ordine k. Verificare in dettaglio che P si estende ad un operatore limitato $H_{k+m}(M, E) \to H_m(M, F)$ per ogni $m \in \mathbb{N}$.

Esercizio 3. Sia R un operatore regolarizzante, con nucleo

$$K_R \in C^\infty(M \times M, \mathrm{HOM}(E, E)) \,.$$

Verificare che R definisce un operatore limitato $R : L^2(M, E) \to H_k(M, E)$ per ogni $k \in \mathbb{N}$.

Esercizio 4. Sia $T = \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$. Consideriamo lo spazio vettoriale delle forme armoniche di grado j, $\mathbb{H}^j(T)$, e sia $\mathbb{H}^*(T) = \oplus_{j=0}^n \mathbb{H}^j(T)$. Dimostrare che $\mathbb{H}^j(T)$ è isomorfo a $\Lambda^j \mathbb{R}^n$ e che quindi $\mathbb{H}^*(T) \simeq \Lambda^* \mathbb{R}^n$.

Esercizio 5. Consideriamo $L^2(S^1)$ e la sua base ortonormale $\{z^j\}_{j \in \mathbb{Z}}$. L'espansione di una funzione f secondo questa base è la serie di Fourier di f:

$$f = \sum \hat{f}(j) z^j \,.$$

I numeri $\hat{f}(j) = < f, z^j >_{L^2}$ sono i coefficienti di Fourier di f. Consideriamo il sottospazio $H_+ := \mathrm{Span}(z^j, j \geq 0)$ e sia Π_+ la proiezione ortogonale su H_+. Se $f \in C(S^1)$ definiamo $T_f : H_+ \to H_+$ come l'operatore $\Pi_+ M_f|_{H_+}$ con M_f l'operatore di moltiplicazione per f.
1. Verificare che T_f è lineare e continuo.
2. Verificare che se $j \in \mathbb{N}$

$$\widehat{(T_f(u))}(j) = \sum_0^\infty \hat{f}(j - n) \hat{u}(n)$$

3. Verificare che $C(S^1) \ni f \to T_f$ definisce una mappa lineare continua fra le algebre di Banach $C(S^1)$ e $\mathcal{L}(H_+)$. Denotiamo con T questa mappa.
4. Sia $\mathcal{K}$ l'ideale degli operatori compatti in $\mathcal{L}(H_+) \equiv \mathcal{L}$ e sia $\mathcal{L}/\mathcal{K}$ l'algebra quoziente (algebra di Calkin). Sia π la proiezione $\mathcal{L} \to \mathcal{L}/\mathcal{K}$. Sappiamo che un operatore T è di Fredholm se e solo se $\pi(T)$ è invertibile nell'algebra di Calkin.
Verificare che se $f \in C^0(S^1)$ e $f(z) \neq 0$ per ogni $z \in S^1$ allora T_f è di Fredholm.
Suggerimenti: Verificare che se $f, g \in C(S^1)$ hanno uno sviluppo di Fourier con un numero finito di termini,

$$f = \sum_{|j| \leq n} \hat{f}(j) z^j \, , \quad g = \sum_{|j| \leq m} \hat{g}(j) z^j$$

allora $T_{fg} - T_f T_g$ è un operatore di rango finito e quindi compatto. In altre parole, per queste particolari funzioni, vale che $\pi T(fg) = \pi(T(f))\pi(T(g))$. (Basta verificare che $(T_{fg} - T_f T_g)(z^\ell) = 0$ se $\ell > m + n$. Per verificare quest'ultima proprietà occorre utilizzare note proprietà delle serie di Fourier (interrogatevi sulla serie di Fourier di un prodotto....) e la parte **2** di questo esercizio.) Concludere per densità e continuità che è sempre vero che $\pi T(fg) = \pi(T(f))\pi(T(g))$; detto diversamente $\pi \circ T$ è un omomorfismo di algebre di Banach, da $C^0(S^1)$ a $\mathcal{L}/\mathcal{K}$. Calcolare $\pi T(1)$ con 1 uguale alla funzione costante uguale a 1. Mettete tutto insieme e dimostrate quanto vi è stato chiesto, e cioè che
se $f \in C^0(S^1)$ e $f(z) \neq 0$ per ogni $z \in S^1$ allora T_f è di Fredholm.