Corso di Laurea Magistrale a.a. 2017-18
Geometria Superiore
Compito a casa del 23/2/2018 (primo compito)

Rivedere la definizione di varietà differenziabile reale e di varietà complessa. Per la definizione di varietà differenziabile reale potete consultare Warner [4], da p. 5 a p. 8. Un'altra buona referenza è Sernesi [3], Capitolo 5. Per le varietà complesse potete consultare il Kodaira [2, Def. 2.3] oppure il Griffith-Harris [1, p.14] oppure il Wells [5, Sezione 1.1].

Esercizio 0. Verificare che $\mathbb{C}P^n$ è una varietà complessa di dimensione (complessa) n.
Suggerimento: sia $\pi : \mathbb{C}^{n+1} \to \mathbb{C}P^n$ la proiezione canonica e denotiamo $\pi(z_0, \ldots, z_n) = [z_o, \ldots, z_n]$. Consideriamo gli aperti

$$U_i = \{[z_0, \ldots, z_n] \quad z_i \neq 0\}$$

e le applicazioni $\phi_i : U_i \to \mathbb{C}^n$, $\phi_i[z_0, \ldots, z_n] = (z_0/z_i, \ldots, \hat{i}, \ldots, z_n/z_i)$. Definire a partire da $\{(U_i, \phi)\}$ una struttura di varietà complessa di dimensione (complessa) n.
Dimostrare in maniera analoga che $\mathbb{R}P^n$ è una varieta' differenziabile reale di dimensione reale n.

Esercizio 1. Sia $n > k$ e sia $G_k(\mathbb{R}^n)$ l'insieme dei sottospazi vettoriali k-dimensionali di $\mathbb{R}^n$. Seguendo i suggerimenti dati più avanti, dimostrare che $G_k(\mathbb{R}^n)$ ha una struttura di varietà differenziabile compatta e connessa di dimensione $k(n-k)$.

Esercizio 2. Ripetere l'esercizio 1 nel caso complesso, dimostrando quindi che $G_k(\mathbb{C}^n)$ è una varietà complessa.

Suggerimenti per l'esercizio 1.

Costruzione di una topologia su $G_k(\mathbb{R}^n)$

Consideriamo l'insieme $V_k(\mathbb{R}^n)$ delle k-ple di vettori linearmente indipendenti di $\mathbb{R}^n$.

Esercizio 1.1.
Verificare che $V_k(\mathbb{R}^n)$ è un aperto del prodotto cartesiano $\mathbb{R}^n \times \overset{(k)}{\cdots} \times \mathbb{R}^n$.
Suggerimento. $V_k(\mathbb{R}^n)$ è l'insieme delle matrici reali $k \times n$ con rango uguale a k; trovare un'applicazione continua $F : M_{k\times n}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^N$, con N opportuno, tale che $V_k(\mathbb{R}^n) = F^{-1}(\mathbb{R}^N \setminus \underline{0})$.

Consideriamo l'applicazione suriettiva

$$q : V_k(\mathbb{R}^n) \to G_k(\mathbb{R}^n)$$

che alla k-pla $(v_1, ..., v_k)$ associa il sottospazio $Span(v_1, ..., v_k)$ e dotiamo $G_k(\mathbb{R}^n)$ della topologia quoziente $\mathcal{T}$.
Alternativamente, possiamo considerare l'insieme $V_k^0(\mathbb{R}^n)$ delle k-ple di vettori ortonormali e la suriezione $q_0 = q|_{V_k^0(\mathbb{R}^n)}$. Possiamo anche dotare $G_k(\mathbb{R}^n)$ della topologia quoziente rispetto a $q_0 : V_k^0(\mathbb{R}^n) \to G_k(\mathbb{R}^n)$; sia $\mathcal{T}_0$ questa topologia.

Esercizio 1.2.
Verificare che $\mathcal{T} = \mathcal{T}_0$.
Suggerimento. Considerate il seguente diagramma

$$\begin{tikzcd}
V_k^0(\mathbb{R}^n) \arrow[r, "i"] \arrow[d, "q_0"'] & V_k(\mathbb{R}^n) \arrow[r, "Gram-Schmidt"] \arrow[d, "q"'] & V_k^0(\mathbb{R}^n) \arrow[d, "q_0"] \\
G_k(\mathbb{R}^n) \arrow[r, "id"'] & G_k(\mathbb{R}^n) \arrow[r, "id"'] & G_k(\mathbb{R}^n)
\end{tikzcd}$$

Dimostrate che questo diagramma è commutativo (è banale) e costituito da applicazioni continue. Servitevene per concludere l'esercizio.

Esercizio 1.3.
Verificare che $V_k^0(\mathbb{R}^n)$ è un compatto di $M_{k\times n}(\mathbb{R}^n)$.

Esercizio 1.4.
Dimostrare che $G_k(\mathbb{R}^n)$ è di Hausdorff.
Suggerimento. Basta dimostrare che due qualsiasi punti $Y, Z \in G_k(\mathbb{R}^n)$sono separati da una funzione continua. Fissato $w \in \mathbb{R}^n$, consideriamo $\rho_w(X) = d(w, X)^2$. Verificare che $\rho_w : G_k(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$ è continua. Considerate poi $w \in Z \setminus Y$ e concludete l'esercizio.

Conclusione: $G_k(\mathbb{R}^n)$ è uno spazio topologico di Hausdorff compatto.

Ulteriori proprietà topologiche

Esercizio 1.5.
Dimostrare che $G_k(\mathbb{R}^n)$ è connesso.
Suggerimento. Dimostrate che $G_k(\mathbb{R}^n)$ è connesso per archi. Presi X ed Y in $G_k(\mathbb{R}^n)$ occorre trovare un cammino che li congiunge. Cercate di utilizzare il fatto che

$$GL(n, \mathbb{R})^+ := \{A \in GL(n, \mathbb{R}) \mid \det(A) > 0\}$$

è connesso per archi.
Osserviamo che ci sono anche altri metodi per dimostrare che $G_k(\mathbb{R}^n)$ è connesso.

Esercizio 1.6.
Dimostrare la seguente Proposizione: Siano X ed Y spazi topologici, con X

a base numerabile. Supponiamo che esista un'applicazione continua $f : X \to Y$ che sia suriettiva ed aperta. Allora Y è a base numerabile.

Esercizio 1.7.
Dimostrare che $G_k(\mathbb{R}^n)$ è a base numerabile.
Suggerimento. Dato che $V^k(\mathbb{R}^n)$ è a base numerabile (è un aperto di $\mathbb{R}^n \times \overset{(k)}{\cdots} \times \mathbb{R}^n$), basta dimostrare che q è aperta. [1]

Costruzione di una struttura differenziabile su $G_k(\mathbb{R}^n)$

Fissiamo $X_0 \in G_k(\mathbb{R}^n)$: vogliamo dimostrare che esiste un intorno aperto U di X_0 omeomorfo a $\mathbb{R}^{k(n-k)}$. Ricordiamo che possiamo scrivere $\mathbb{R}^n = X_0 \oplus X_0^\perp$. Sia

$$U = \{Y \in G_k(\mathbb{R}^n) \mid Y \cap X_0^\perp = 0\} .$$

Esercizio 1.8.
Dimostrare che U è un aperto di $G_k(\mathbb{R}^n)$.
Suggerimento. Se $\{x_1, ..., x_{n-k}\}$ è una base di $X_0^\perp$, dimostrate dapprima che

$$q^{-1}(U) = \{(y_1, ..., y_k) \mid (y_1, ..., y_k, x_1, ..., x_{n-k}) \in V_n(\mathbb{R}^n)\} ;$$

verificate poi che $q^{-1}(U)$ è aperto costruendo un'applicazione continua $F : V_k(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathbb{R}$ tale che $q^{-1}(U) = F^{-1}(\mathbb{R} \setminus \{0\})$.

Indichiamo con π e $\pi_\perp$ le proiezioni ortogonali di $X_0 \oplus X_0^\perp$ su X_0 e $X_0^\perp$ rispettivamente.

Esercizio 1.9. *Per ogni $Y \in U$, si ha che $\pi|_Y : Y \to X_0$ è un isomorfismo di spazi vettoriali.*
Suggerimento: basta dimostrare che è iniettiva.

Rimane quindi definita l'applicazione

$$\begin{array}{rccl} S: & U & \longrightarrow & Hom(X_0, X_0^\perp) \\ & Y & \longmapsto & \pi_\perp|_Y \circ (\pi|_Y)^{-1} \end{array}$$

Fissiamo poi una base $\mathbb{V} := \{v_1, ..., v_k\}$ in X_0 ed una base $\mathbb{U} := \{u_1, ..., u_{n-k}\}$ in $X_0^\perp$; rimane allora definito un isomorfismo di spazi vettoriali (quindi, in particolare, un omeomorfismo)

$$\Phi_{\mathbb{V},\mathbb{U}} : Hom(X_0, X_0^\perp) \to \mathbb{R}^{k(n-k)} ;$$

[1] Vediamolo per $k = 1$, cioè per lo spaazio proiettivo (voi dovrete fare il caso generale). Notiamo che $V^1(\mathbb{R}^n) = \mathbb{R}^n \setminus 0$ e che $\mathbb{R} \setminus 0 \equiv GL(1, \mathbb{R})$ agisce per omeomorfismi su $V^1(\mathbb{R}^n)$. Notiamo anche che

$$q^{-1}(q(v)) = \cup_{\lambda \neq 0} \lambda v \equiv \cup_{\lambda \in GL(1,\mathbb{R})} \lambda v$$

Ne segue che se A è aperto in $V^1(\mathbb{R}^n) = \mathbb{R}^n \setminus 0$ allora

$$q^{-1}(q(A)) = \cup_{\lambda \in GL(1,\mathbb{R})} \lambda A$$

che è aperto in quanto unione di aperti. Per definizione si ha allora che $q(A)$ è aperto.

$\Phi_{\mathbb{V},\mathbb{U}}$ è l'applicazione che associa ad un'applicazione lineare $X_0 \to X_0^{\perp}$ la sua matrice associata con base di partenza $\mathbb{V}$ e base di arrivo $\mathbb{U}$.
Sia $T_{\mathbb{V},\mathbb{U}} := \Phi_{\mathbb{V},\mathbb{U}} \circ S$; denoteremo spesso questa applicazione semplicemente con T.

Esercizio 1.10. *Verificare che T è continua.*
Suggerimento: potete ad esempio cercare $\widetilde{T} : q^{-1}(U) \to \mathbb{R}^{k(n-k)}$ continua tale che $T \circ q = \widetilde{T}$.

Inoltre T è biiettiva; infatti $\Phi_{\mathbb{V},\mathbb{U}}$ è ovviamente biiettiva; S è anche biettiva, con inversa data, per ogni $\varphi \in Hom(X_0, X_0^{\perp})$, da

$$S^{-1}(\varphi) = Span\big(x_1 + \varphi(x_1), ..., x_k + \varphi(x_k)\big)$$

Esercizio 1.11. *Verificare l'espressione di S^{-1}; verificare che l'inversa di T è continua.*

In conclusione, ogni $X \in G_k(\mathbb{R}^n)$ possiede un intorno coordinato omeomorfo a $\mathbb{R}^{k(n-k)}$ ed è quindi una varietà topologica (connessa e compatta) di dimensione $k(n-k)$.

Rimane da verificare che due carte locali sono C^∞-compatibili sulla loro intersezione.

Osservazione. Sia $Y \in U$. Fissiamo una base $\{v_1, ..., v_k\}$ di X_0; allora, esiste un' **unica** base $\{y_1, ..., y_k\}$ di Y tale che $\pi(y_i) = v_i$ e vale l'identità $y_i = v_i + S(Y)v_i$.

Consideriamo, allora, due intorni coordinati U e U' tali che $U \cap U' \neq \emptyset$;

$$U = \{Y \mid Y \cap X^{\perp} = 0\} \ , \ U' = \{Y \mid Y \cap (X')^{\perp} = 0\}$$

Osserviamo preliminarmente che le carte che abbiamo introdotto in U e U' rispettivamente dipendono dalla scelta delle due basi in $X, X^{\perp}$ e $X', (X')^{\perp}$; è chiaro però che se dimostriamo che le due carte U e U' sono C^∞-compatibili per scelte particolari delle basi, allora le carte saranno C^∞-compatibili per scelte arbitrarie delle basi [2]. Questa osservazione preliminare ci permette di scegliere basi opportune, che semplificano la dimostrazione della C^∞-compatibilità.

Fissiamo quindi $Y \in U \cap U'$. Sia $\mathbb{V} = \{v_1, ..., v_k\}$ una base di X e sia $\mathbb{U} = \{u_1, ..., u_{n-k}\}$ una base per $X^{\perp}$. Indichiamo con v_i' la proiezione su X' di $v_i + S(Y)v_i$. $\{v_1', ..., v_k'\}$ è una base di X' e rimane definita un'applicazione lineare invertibile $\psi : X \to X'$ tale che $\psi(v_i) = v_i'$; $\psi \equiv \pi'|_Y \circ \pi|_Y{}^{-1}$, dove $\pi|_Y$ è la proiezione di Y su X e $\pi'|_Y$ quella su X', entrambe isomorfismi per quanto osservato in precedenza. Consideriamo la base $\mathbb{V}' = \{v_1', ..., v_k'\}$ di X' e sia $\mathbb{U}'$ un'arbitraria base ortonormale di $(X')^{\perp}$.

[2] Questa è una semplice conseguenza della formula che lega le matrici associate ad una stessa applicazione lineare quando si scelgano basi di partenza ed arrivo differenti

Esercizio 1.12 *Verificare che le carte* $(U, T_{\mathbb{V},\mathbb{U}})$ *e* $(U', T'_{\mathbb{V}',\mathbb{U}'})$ *sono* C^∞*-compatibili. In altri termini, consideriamo* $T(U \cap U')$ *e* $T'(U \cap U')$*, due sottoinsiemi aperti di* $\mathbb{R}^{k(n-k)} \equiv M_{(n-k)\times k}(\mathbb{R})$*; dimostrate che l'applicazione* $T' \circ T^{-1}$ *:*

$$M_{(n-k)\times k}(\mathbb{R}) \supseteq T(U \cap U') \ni A \longrightarrow T' \circ T^{-1}(A) \in T'(U \cap U') \subseteq M_{(n-k)\times k}(\mathbb{R})$$

dipende in maniera C^∞ *dai coefficienti della matrice* A*.*

Ora mettete tutto insieme e concludete l'esercizio 1 dimostrando che

La Grassmanniana $G_k(\mathbb{R}^n)$ *ha una struttura di varietà differenziabile connessa compatta di dimensione* $k(n-k)$*.*

Bibliografia

[1] P. Griffiths, J. Harris. *Priciples of Algebraic Geometry*, Wiley, New York.

[2] K. Kodaira. *Complex manifolds and deformations of complex structures*. Grundlehren der Math. Wiss. **283**. Springer.

[3] E. Sernesi. *Geometria 2*. Bollati-Boringhieri.

[4] F. Warner. *Foundations of Differentiable manifolds and Lie Groups*. Graduate text in Mathematics **94**. Springer-Verlag.

[5] R. O. Wells Jr. *Differential analysis on complex manifolds* Graduate text in Mathematics. **65** Springer-Verlag.