Corso di Laurea Magistrale a.a. 2017-18
Geometria Superiore
Compito a casa del 08/3/2018 (terzo compito)

Esercizio1. Sia (E, π_E, X) un fibrato vettoriale e sia $\{U_\alpha\}$ un ricoprimento di aperti banalizzanti per E. Rimane allora definito il cociclo $\{g_{\alpha\beta}\}$ delle funzioni di transizione

$$g_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \to GL(k, \mathbb{R})$$

Sia ora (F, π_F, X) un secondo fibrato e supponiamo che gli aperti $\{U_\alpha\}$ siano banalizzanti anche per (F, π_F, X). Sia $\{f_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \to GL(k, \mathbb{R})\}$ il cociclo associato a questo secondo fibrato. In generale diremo che due cocicli $\{k_{\alpha\beta}\}$ e $\{h_{\alpha\beta}\}$ sono equivalenti se $\forall \alpha$ esiste $\lambda_\alpha : U_\alpha \to GL(k, \mathbb{R})$ continuo tale che

$$k_{\alpha\beta} = \lambda_\alpha h_{\alpha\beta} \lambda_\beta^{-1} .$$

Verificare che (E, π_E, X) è isomorfo a (F, π_F, X) se e solo se i rispettivi cocicli sono equivalenti.

Esercizio 2. Consideriamo la varietà complessa $\mathbb{C}P^n$. Nell'Esercizio 0 del Primo Compito a casa avete dimostrato che gli aperti

$$U_i = \{[z_0, \dots, z_n] \ \ z_i \neq 0\}$$

con le applicazioni $\phi_i : U_i \to \mathbb{C}^n$, $\phi_i[z_0, \dots, z_n] = (z_0/z_i, \dots, \hat{i}, \dots, z_n/z_i)$ costituiscono un atlante complesso di $\mathbb{C}P^n$.
Consideriamo il fibrato universale $(E_1(\mathbb{C}^{n+1}), \pi, \mathbb{C}P^n)$:
(i) verificare che gli aperti U_i sono banalizzanti per $(E_1(\mathbb{C}^{n+1}), \pi, \mathbb{C}P^n)$;
(ii) determinare le associate funzioni di transizione;
(iii) Vero o Falso: $(E_1(\mathbb{C}^{n+1}), \pi, \mathbb{C}P^n)$ è un fibrato olomorfo di rango 1.

Esercizio 3. Consideriamo in particolare $\mathbb{C}P^1$. Descrivere le funzioni di transizione di L^k, $k \in \mathbb{N}$ (con L^k uguale al prodotto tensoriale di L con se stesso k volte). Descrivere le funzioni di transizione di $(L^*)^k$. Poniamo $L^{-k} = (L^*)^k$.
Vero o falso : $\ell \neq k \Rightarrow$ L^ℓ *e* L^k *non sono isomorfi.*
(Osserviamo che le funzioni di transizione del prodotto tensoriale sono il prodotto tensoriale delle funzioni di transizione. Qui parliamo di un fibrato di rango 1, quindi...).

Esercizio 4. Ripassare i fondamenti sulle forme differenziali.