Corso di Laurea Magistrale a.a. 2017-18
Geometria Superiore
Compito a casa del 5/4/2018 (quinto compito)

Esercizio 1. Sia $E \to M$ un fibrato e sia $g_E(\, , \,)$ una metrica su E. Sia $\gamma : I \to M$ una curva. Supponiamo per semplicità che γ definisca un'immersione topologica [1]. Sia ∇ una connessione su E compatibile con la metrica g_E. Verificare che il trasporto parallelo lungo γ è un'isometria.

Esercizio 2. Sia M una varietà differenziabile. Consideriamo $[0,1] \times M$ e le inclusioni naturali $i_0 : M \to [0,1] \times M$, $i_0(p) = (0,p)$ e $i_1 : M \to [0,1] \times M$, $i_1(p) = (1,p)$. Sia F un fibrato su $[0,1] \times M$. Possiamo sempre dotare F di una connessione.
1. Utilizzando il trasporto parallelo verificare che esiste un isomorfismo di fibrati $i_0^* F \simeq i_1^* F$.
2. Dedurre che se (E, π, M) è un fibrato e $f : N \to M$ e $g : N \to M$ sono due applicazioni C^∞ che sono $\mathcal{C}^\infty$-omotope allora $f^* E \simeq g^* E$.

Esercizio 3. Sia (M, g) una varietà riemanniana e sia ∇ la connessione di Levi-Civita. Sia $f : M \to M$ un diffeomorfismo e supponiamo che f sia un' *isometria* ($df_p : T_p M \to T_{f(p)} M$ è un'isometria lineare $\forall p$). Dato che f è un diffeomorfismo, il differenziale di f induce un'applicazione $f_* : \mathcal{C}^\infty(M, TM) \to \mathcal{C}^\infty(M, TM)$ definita come segue: se W è un campo di vettori su M allora $(f_* W)(p) := df_q(W_q)$ con $f(q) = p$.
Dimostrare che

$$\nabla_{f_* X} f_* Y = f_*(\nabla_X Y) \, .$$

Esercizio 4. Consideriamo la sfera S^2.
1. Determinare i simboli di Christoffel (rispetto alla metrica indotta da $\mathbb{R}^3$) in coordinate sferiche.
Consideriamo i punti

$$P = (1,0,0) \, , \quad Q = (0,1,0) \, , \quad R = (0,0,1)$$

Sia γ_{PQ} la porzione di equatore congiungente P e Q. Siano γ_{PR} e γ_{QR} le porzioni di meridiani congiungenti P ed R, e Q ed R.
2. Parametrizzare queste 3 curve (banale).
3. Sia $\underline{v} = (0, \alpha, \beta) \in T_{(1,0,0)} S^2$. Sia ∇ la connessione di Levi-Civita. Trasportiamo per parallelismo $\underline{v}$ lungo queste 3 curve nell'ordine $\gamma_{PQ} \to \gamma_{QR} \to \gamma_{RP}$ (notare che la composizione delle tre curve è un laccio puntato in P). Calcolare il vettore $\underline{w} \in T_{(1,0,0)} S^2$ ottenuto alla fine di questi 3 trasporti paralleli.

[1] "Embedding" in Inglese

Esercizio 5. Consideriamo le matrici

$$e_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad e_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix} \tag{1}$$

Queste tre matrici godono della seguente proprietà

$$e_i e_j + e_j e_i = \delta_{ij}\,.$$

Sia $x = (x^0, x^1, x^2) \in \mathbb{R}^3$, $||x|| = 1$ e consideriamo $e(x) = x^0 e_0 + x^1 e_1 + x^2 e_2$
1. Verificare che $e(x)^2 = \mathrm{Id}$.

Consideriamo i due fibrati complessi di rango 1 su S^2, L_+, L_- definiti come segue:

$$(L_\pm)_x := \mathrm{Im}(\frac{1}{2}(\mathrm{Id} \pm e(x))) = \mathrm{Ker}(e(x) \mp \mathrm{Id})\,.$$

È chiaro che c'è una decomposizione $S^2 \times \mathbb{C}^2 = L_+ \oplus L_-$. Denotiamo con p la proiezione sul primo addendo: quindi

$$p(x) = \frac{1}{2}(\mathrm{Id} + e(x)).$$

Sia ∇ la connessione su L_+ ottenuta dalla connessione banale su $S^2 \times \mathbb{C}^2$ per proiezione.
2. Verificare che esiste $C \in \mathbb{R}$, $C \neq 0$, tale che

$$\nabla^2 = C\, d\mathrm{vol}_{S^2}$$

dove la forma di volume è calcolata rispetto alla metrica indotta da $\mathbb{R}^3$.
Cosa possiamo dedurre da questa relazione ?

Esercizio 6. Consideriamo $\mathbb{C}P^1$. Definire una metrica hermitiana h su $\mathbb{C}P^1$ in modo tale che h sia data da $1/((1+|z|^2))^2$ nella carta $U = \{[z_0, z_1] \mid z_0 \neq 0\}$ con coordinata $z = z_1/z_0$. Scrivere la curvatura associata alla connessione complessa hermitiana e dimostrare che vale

$$\int_{\mathbb{C}P^1} c_1(T^{1,0}\mathbb{C}P^1) = 2 \tag{2}$$

(in classe abbiamo dimostrato questa uguaglianza utilizzando il teorema di Gauss-Bonnet.)

Esercizio 7. Sia L il fibrato tautologico su $\mathbb{C}P^1$. Dimostrare che sussiste il seguente isomorfismo: $T^{1,0}\mathbb{C}P^1 = L^* \otimes L^*$. (Suggerimento: considerare le funzioni di transizione.) Utilizzare questo isomorfismo per dimostrare ancora una volta che $\int_{\mathbb{C}P^1} c_1(T^{1,0}\mathbb{C}P^1) = 2$

Esercizio 8. Sia M una varietà differenziabile orientabile di dimensione 4ℓ. Fissiamo indici $i_1, \dots, i_k$ tali che $i_1 + \cdots + i_k = \ell$ e definiamo il numero di Pontrjagin associato a $i_1, \dots, i_k$ come

$$\int_M p_{i_1}(M) \wedge \cdots \wedge p_{i_k}(M)$$

Supponiamo ora che M sia il bordo di una varietà orientabile W di dimensione $4\ell + 1$: $M = \partial W$. Dimostrare che allora tutti i numeri di Pontrjagin sono nulli.
(Suggerimenti:
(i) utilizzando la normale al bordo si ha $TW|_{\partial W} \equiv TW|_M = TM \oplus 1$, dove abbiamo denotato con 1 un fibrato banale di rango 1.
(ii) Utilizzare il teorema di Stokes.)