Corso di Laurea Magistrale a.a. 2017-18
Geometria Superiore
Compito a casa del 6/5/2018 (sesto compito)

Denotiamo con $\mathrm{Cl}(k)$ l'algebra di Clifford associata allo spazio vettoriale $\mathbb{R}^k$ dotato del prodotto scalare canonico. $\mathrm{Cl}(k) = \mathrm{Cl}^0(k) \oplus \mathrm{Cl}^1(k)$, con $\mathrm{Cl}^0(k)$ ($\mathrm{Cl}^1(k)$) la sottoalgebra generata dagli elementi che sono il prodotto di un numero pari (dispari) di elementi di $\mathbb{R}^k$. $\mathbb{C}\mathrm{l}(k)$ è la complessificazione di $\mathrm{Cl}(k)$. Una base ortonormale di $\mathbb{R}^k$ è denotata con $\{\underline{e}_1, \ldots, \underline{e}_k\}$.

Esercizio 1. Sia $\mathbb{H}$ l'algebra dei quaternioni. Verificare che si hanno i seguenti isomorfismi di algebre:

$$\mathrm{Cl}(1) \simeq \mathbb{C}\,, \quad \mathrm{Cl}(2) \simeq \mathbb{H}\,, \quad \mathrm{Cl}^0(2) \simeq \mathbb{C} \subset \mathbb{H}$$

Esercizio 2. Verificare che $\mathrm{Cl}(3) \simeq \mathbb{H} \oplus \mathbb{H}$. Suggerimento: poniamo

$$x = \underline{e}_1,\ y = \underline{e}_2,\ z = \underline{e}_3$$

Verificare che l'unione delle seguenti 2 quadruple fornisce una base di $\mathrm{Cl}(3)$:

$$\frac{1+xyz}{2}\,, \quad \frac{xy-z}{2}\,, \quad \frac{yz-x}{2}\,, \quad \frac{zx-y}{2}\,;$$
$$\frac{1-xyz}{2}\,, \quad \frac{xy+z}{2}\,, \quad \frac{yz+x}{2}\,, \quad \frac{zx+y}{2}\,.$$

Utilizzare questa base per definire l'isomorfismo. Verificare che $\mathrm{Cl}^0(3)$ corrisponde ad una copia diagonale di $\mathbb{H}$ in $\mathbb{H} \oplus \mathbb{H}$. Dimostrare che $\mathrm{Cl}^0(4) \simeq \mathbb{H} \oplus \mathbb{H}$.

Esercizio 3. Dimostrare che $\mathrm{Spin}(2) = \{\cos\theta + (\sin\theta)\underline{e}_1 \cdot \underline{e}_2\}$ e che quindi $\mathrm{Spin}(2) \simeq S^1 = SO(2)$. Verificare che con questa identificazione il rivestimento $\rho : \mathrm{Spin}(1) \to SO(2)$ che abbiamo definito a lezione è dato da $\theta \to 2\theta$. Avrete bisogno di un pò di trigonometria.

Esercizio 4. Verificare che $\mathrm{Spin}(3)$ è isomorfo alla sfera unitaria S^3 in $\mathbb{H}$. (Suggerimento: utilizzare l'identificazione $\mathrm{Cl}(3) \leftrightarrow \mathbb{H} \oplus \mathbb{H}$.) Dedurne che $\mathrm{Spin}(3)$ è isomorfo a $SU(2)$.

Esercizio 5. Sia V uno spazio vettoriale e q una forma bilineare simmetrica. Sia $\mathrm{Cl}(V, q)$ l'algebra di Clifford associata. Abbiamo visto che $\mathrm{Cl}(V, q)$ è un'algebra filtrata.
Dimostrare che esiste un isomorfismo fra l'algebra graduata associata a $\mathrm{Cl}(V, q)$, e cioè

$$\oplus_k(\mathrm{Cl}^k(V, q)/\mathrm{Cl}^{k-1}(V, q))$$

e l'algebra esterna $\Lambda^* V$

Esercizio 6. Consideriamo le *matrici di Pauli*:

$$\gamma_2 = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} \quad \gamma_3 = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \gamma_4 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \gamma_2\gamma_3$$

(i). Verificare che valgono le seguenti relazioni:

$$\gamma_3\gamma_2 = -\gamma_4 \qquad \gamma_2\gamma_4 = -\gamma_3 \qquad \gamma_4\gamma_2 = \gamma_3$$
$$\gamma_2 i = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(ii). Definiamo f da $\mathbb{C}l(2)$ a $\mathbb{M}_{2\times 2}(\mathbb{C})$ mandando 1 nella matrice identità, $\underline{e}_1$ in γ_3 ed $\underline{e}_2$ in γ_4. Verificare che f si estende ad un isomorfismo di algebre $\mathbb{C}l(2) \simeq \mathbb{M}_{2\times 2}(\mathbb{C})$.
(iii) Supponiamo ora che sia $k \geq 1$ e definiamo un'applicazione:

$$f : \mathbb{C}l(k+2) \longrightarrow \mathbb{C}l(k) \otimes \mathbb{M}_{2\times 2}(\mathbb{C})$$

come segue. Sia $\{\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_k, \underline{e}_{k+1}, \underline{e}_{k+2}\}$ la fissata base ortonormale per $\mathbb{R}^{k+2}$; allora f è definita da

$$\begin{array}{ccc} 1 & \longrightarrow & Id \\ \underline{e}_j & \longrightarrow & \underline{e}_j \otimes (\gamma_2 i) \quad \text{per } 1 \leq j \leq k \\ \underline{e}_{k+1} & \longrightarrow & Id \otimes \gamma_3 \\ \underline{e}_{k+2} & \longrightarrow & Id \otimes \gamma_4 \end{array}$$

Verificare che
$$f(\underline{e}_i)f(\underline{e}_j) + f(\underline{e}_j)f(\underline{e}_i) = -2\delta_{ij} Id$$
e dedurne che f può essere estesa ad un omomorfismo di algebre $f : \mathbb{C}l(k+2) \to \mathbb{C}l(k) \otimes \mathbb{M}_{2\times 2}(\mathbb{C})$.
(iv) Verificare che f è suriettiva e quindi, a causa delle dimensioni uguali, un isomorfismo di algebre.
Suggerimento. Denotati con
α_{pari} = prodotto di un numero pari di elementi di $\{\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_k\}$
e
$\alpha_{dispari}$ = prodotto di un numero dispari di elementi di $\{\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_k\}$
si considerino le immagini di

$$\alpha_{pari},\ \alpha_{dispari},\ \alpha_{pari}\underline{e}_{k+1}\underline{e}_{k+2},\ \alpha_{dispari}\underline{e}_{k+1}\underline{e}_{k+2}$$

$$\alpha_{pari}\underline{e}_{k+1},\ \alpha_{dispari}\underline{e}_{k+1},\ \alpha_{pari}\underline{e}_{k+2},\ \alpha_{dispari}\underline{e}_{k+2}$$

Esercizio 7. Sia
$$P \ :\ C^\infty(M, E) \to C^\infty(M, E)$$
un operatore differenziale di ordine k: $P \in \mathrm{Diff}^k(M; E, F)$. Abbiamo dato in classe la definizione di simbolo principale $\sigma_{\mathrm{pr}}(P) \in C^\infty(M, \mathrm{Hom}(\pi^* E, \pi^* F))$

[1]. Verificare che $\sigma_{\mathrm{pr}}(P)(\underline{e})$ non dipende dalle scelte fatte e che è una applicazione lineare da E_x in F_x.
Verificare che se M è uguale ad un aperto U di $\mathbb{R}^n$ e se E ed F sono i fibrati prodotto su U allora questa nozione si riduce alla seguente (usuale) nozione di simbolo principale per una matrice (P_{ij}) di operatori differenziali: se

$$(P_{ij}) = \left(\sum_{|\alpha| \leq k} a_\alpha(ij) \left(\frac{1}{\sqrt{-1}} \frac{\partial}{\partial x_1} \right)^{\alpha_1} \cdots \left(\frac{1}{\sqrt{-1}} \frac{\partial}{\partial x_n} \right)^{\alpha_n} \right)$$

allora

$$\sigma_{\mathrm{pr}}((P_{ij}))(x, \underline{e}) = \left(\sum_{|\alpha| = k} a_\alpha(ij) (\underline{e}^1)^{\alpha_1} \ldots (\underline{e}^n)^{\alpha_n} \right).$$

Esercizio 8. Sia (M, g) una varietà riemanniana. Sia ∇ la connessione di Levi-Civita. Sia $\Lambda^* M := \Lambda^*(T^* M)$ con la sua naturale struttura di fibrato di moduli di Clifford (quindi $c(\underline{e}) := \epsilon(\underline{e}) - i(\underline{e})$).
Spiegare come ∇ induce una connessione $\nabla^{\Lambda^* M}$ sul fibrato $\Lambda^* M$. Dimostrare che questa connessione è di Clifford.

Esercizio 9. Sia (M, h) una varietà complessa con metrica hermitiana h. Verificare che il simbolo principale di $\overline{\partial} + \overline{\partial}^*$ è dato da

$$\sigma_{\mathrm{pr}}(\overline{\partial} + \overline{\partial}^*)(\underline{e}_x) = \epsilon(\underline{e}_x^{0,1}) - i(\underline{e}_x^{1,0})$$

[1]se $\underline{e} \in T_x^* M$ ed $e_x \in E_x$; introduciamo $f \in C^\infty(M)$ ed $e \in C^\infty(M, E)$ tali che $df|_x = \underline{e}$ e $e(x) = e_x$ e definiamo $\sigma_{\mathrm{pr}}(P)(\underline{e}) \in Hom(E_x, F_x)$ come segue :

$$\sigma_{\mathrm{pr}}(P)(x, \underline{e})(e_x) = i^k \frac{1}{k!} P((f - f(x))^k e)(x)$$