Corso di Laurea Magistrale a.a. 2017-18
Geometria Superiore
Compito a casa del 01/3/2018 (secondo compito)

Esercizio 1. Sia $E_k(\mathbb{R}^n) = \{(p, \underline{v}) \in G_k(\mathbb{R}^n) \times \mathbb{R}^n \mid \underline{v} \in p\}$ e sia $\pi : E_k(\mathbb{R}^n) \to G_k(\mathbb{R}^n)$ l'applicazione $(p, \underline{v}) \to p$. Dimostrare che la terna $(E_k(\mathbb{R}^n), \pi, G_k(\mathbb{R}^n))$ è un fibrato vettoriale reale C^0 di rango k.
Facoltativo: dimostrare che è di fatto un fibrato C^∞.

Esercizio 2. Sia X uno spazio topologico e $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ un ricoprimento. Supponiamo che per ogni coppia $(\alpha, \beta) \in A \times A$ sia assegnata una funzione continua

$$g_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \to GL(k, \mathbb{R})$$

e che questa collezione di mappe verifichi le seguenti proprietà:
1) $g_{\alpha\alpha}(m) = \mathrm{Id}_{k\times k}\ \forall m \in U_\alpha$
2) $g_{\alpha\beta} \circ g_{\beta\gamma} = g_{\alpha\gamma}$ in $U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma$.

Sia $\widehat{E}$ l'unione disgiunta dei $U_\alpha \times \mathbb{R}^k$; introduciamo una relazione $\mathcal{R}$ in $\widehat{E}$ come segue

$$U_\alpha \times \mathbb{R}^k \ni (x, e)\mathcal{R}(y, f) \in U_\beta \times \mathbb{R}^k \Leftrightarrow x = y \text{ e } e = g_{\alpha\beta}(x) f$$

Verificare che R è una relazione di equivalenza.
Sia E lo spazio quoziente dotato della topologia indotta e sia $\pi : E \to X$ la mappa che associa alla classe d'equivalenza di (x, e) il punto $x \in X$.
Verificare che (E, π, X) è un fibrato vettoriale (continuo) di rango k.
Verificare che se M è una varietà differenziabile e le $g_{\alpha\beta}$ sono C^∞ allora (E, π, M) può essere dotato di una struttura di fibrato reale C^∞.

Esercizio 3. Dimostrare che il fibrato tangente ad una varietà differenziabile M,

$$TM = \cup_{m\in M} T_m M\,,$$

è un fibrato vettoriale C^∞ di rango uguale a $\dim M$.
Determinarne inoltre le funzioni di transizione.

Esercizio 4. Sia $E \to X$ un fibrato vettoriale di rango k. Verificare che è ben definito il duale di E, E^*. Determinare le funzioni di transizione di E^* a partire da quelle di E.

Esercizio 5. Siano (E, π_E, X) e (F, π_F, X) due fibrati vettoriali C^0. Sia $\phi : E \to F$ un morfismo di fibrati e supponiamo che $\phi|_{E_x}$ sia un isomorfismo di spazi vettoriali per ogni $x \in X$. Verificare che ϕ è allora un isomorfismo di fibrati (e cioè ϕ è anche un omeomorfismo).
Dimostare che se i due fibrati sono C^∞ e ϕ è C^∞ allora dall'ipotesi che $\phi|_{E_x}$ sia un isomorfismo di spazi vettoriali per ogni $x \in X$ discende che ϕ è un diffeomorfismo e quindi un isomorfismo di fibrati C^∞.