Corso di Laurea Magistrale a.a. 2017-18
Geometria Superiore
Compito a casa del 16/3/2018 (quarto compito)

Esercizio 1. Sia $E \xrightarrow{\pi} M$ un fibrato reale (rispettiv. complesso) di rango k su M, varietà differenziabile. Verificare in dettaglio che esiste sempre una metrica (rispett. metrica hermitiana) su E.
Verificare che se esiste una metrica (hermitiana) allora le funzioni di transizione possono essere prese a valori in $O(k)$ (risp. $U(k)$). (Si dice allora che il gruppo di struttura di E può essere ridotto a $O(k)$ (risp. $U(k)$).

Esercizio 2. Sia $E \xrightarrow{\pi} M$ un fibrato reale di rango k su M, varietà differenziabile. Sia g una metrics per E e sia F us sottofibrato. Verificare che

$$F^\perp = \cup_{m\in M} F_m^\perp$$

è un fibrato, il fibrato ortogonale ad F.

Esercizio 3. Sia $E \xrightarrow{\pi} M$ un fibrato reale di rango k su M, varietà differenziabile. Verificare in dettaglio che esiste sempre una connessione su $E \xrightarrow{\pi} M$.

Esercizio 4. Sia $M = S^2$ e sia ∇ la connessione su TS^2 ottenuta dalla connessione banale su $S^2 \times \mathbb{R}^3$ per proiezione ortogonale dalla decomposizione $TS^2 \oplus N = S^2 \times \mathbb{R}^3 = T(\mathbb{R}^3)|_{S^2}$, con N il fibrato normale (che è banale):

$$\nabla Y = (\mathrm{Id}_{T^*S^2} \otimes p)(dY)\,.$$

Sia U l'aperto di S^2 per il quale le coordinate sferiche (u, v) sono una carta locale:

$$(0, 2\pi) \times (0, \pi) \ni (u, v) \to (\cos u \sin v, \sin u \sin v, \cos v) \in U \subset S^2.$$

Calcolare la 1-forma di connessione di ∇ su U rispetto ad una base ortonormale locale di $TS^2|_U$.
Suggerimento: considerare una base ortonormale globale $\{e_1, e_2, e_3\}$ di $U \times \mathbb{R}^3$, $U \subset S^2$ con e_1, e_2 una base locale ortonormale di TS^2 e e_3 un vettore normale a S^2. Ad esempio:
$e_1 = (-\sin u, \cos u, 0)\,, \quad e_2 = (\cos u \cos v, \sin u \cos v, -\sin v)$
$e_3 = (\cos u \sin v, \sin u \sin v, \cos v)$.