dove $A \in M_{m,n}(\mathsf{K})$, $\mathbf{b} \in M_{m,1}(\mathsf{K})$, $\mathbf{X} = {}^t(X_1 \ \dots \ X_n)$, *è compatibile se e solo se*

$$r(A) = r(A\,\mathbf{b}).$$

In tal caso il sistema [5.7] *possiede* ∞^{n-r} *soluzioni, dove* $r = r(A)$.

Dimostrazione

Sia

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Una n-upla $(x_1, \dots, x_n) \in \mathsf{K}^n$ è soluzione di [5.7] se e solo se si ha

$$x_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix} + \dots + x_n \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}. \qquad [5.8]$$

La [5.8] esprime la condizione che il vettore $\mathbf{b}$ sia combinazione lineare delle colonne di A. Questa condizione è verificata se e solo se la matrice $(A\,\mathbf{b})$ ha lo stesso rango per colonne di A, cioè se e solo se $r(A) = r(A\,\mathbf{b})$. La prima parte del teorema è dimostrata.

Se il sistema [5.7] è compatibile, e $r = r(A)$, possiamo supporre che le sue prime r equazioni siano linearmente indipendenti e sostituire [5.7] con il sistema equivalente:

$$\begin{aligned} a_{11}X_1 + a_{12}X_2 + \dots + a_{1n}X_n &= b_1 \\ a_{21}X_1 + a_{22}X_2 + \dots + a_{2n}X_n &= b_2 \\ \vdots \qquad\qquad & \ \ \vdots \\ a_{r1}X_1 + a_{r2}X_2 + \dots + a_{rn}X_n &= b_r. \end{aligned} \qquad [5.9]$$

Applicando il procedimento di Gauss-Jordan al sistema [5.9], nessuna delle equazioni si riduce a $0 = 0$, perché ciò implicherebbe che essa è linearmente dipendente da quelle che la precedono. Quindi il sistema [5.9] si può trasformare in un sistema a gradini di r equazioni; ciò significa che [5.9], e quindi [5.7], possiede ∞^{n-r} soluzioni.

Esercizi

1. Calcolare il rango delle seguenti matrici a elementi razionali:

a) $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 3 & 1 & -1 \\ 1 & 4 & 2 & 0 \\ -\frac{1}{2} & -2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 4 & 0 & 7 & 2 \\ 2 & 2 & 3 & 11 & 7 \\ 3 & 6 & 3 & 18 & 9 \end{pmatrix}.$

2. Dimostrare che tutte le matrici $n \times m$ a elementi in K di rango minore o uguale a 1 sono della forma

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} (b_1 \dots b_m), \qquad a_1, a_n, b_1, \dots, b_n \in \mathsf{K}.$$

6 Determinanti

In questo paragrafo descriveremo un modo di associare un elemento di K, chiamato "il determinante di A", ad ogni matrice quadrata A a elementi in K. Il determinante, come vedremo, è uno strumento di fondamentale importanza pratica in algebra lineare.

Faremo uso del *simbolo di sommatoria* Σ per denotare la somma di un numero finito di termini contrassegnati da uno o più indici; gli insiemi di variabilità degli indici saranno indicati sotto e/o sopra al simbolo Σ.

Similmente il simbolo Π sarà utilizzato per denotare un prodotto.

6.1 DEFINIZIONE *Sia* $n \geq 1$ *e*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \in M_n(\mathsf{K}).$$

Il determinante di A è l'elemento di K

$$\det(A) = \sum_{p \in \sigma_n} \epsilon(p) a_{1p(1)} a_{2p(2)} \dots a_{np(n)}, \qquad [6.1]$$

dove σ_n denota l'insieme di tutte le permutazioni di $\{1, 2, \dots, n\}$ *e dove $\epsilon(p)$ è il segno della permutazione* $p \in \sigma_n$ (cfr. app. *B*); $\det(A)$ *verrà anche indicato con* $\det(a_{ij})$ *oppure con* $|A|$.

La [6.1] è una somma di $n!$ termini, che, a meno del segno, sono tutti i possibili prodotti di n elementi di A appartenenti a righe ed a colonne diverse.

Se $n = 1$, allora $A = (a)$ e si ha $\det(A) = a$.

Se $n = 2$ e

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix},$$

allora

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

Se $n = 3$ si ha

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} + a_{12}a_{23}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31}.$$

Al crescere di n il determinante di una matrice $n \times n$ qualsiasi non è facile da calcolare direttamente a partire dalla sua definizione [6.1]. Vedremo tra poco dei modi più semplici di farlo senza dover ricorrere alla [6.1].

Se $A \in M_n(\mathsf{K})$, denoteremo come al solito con $A^{(1)}, \dots, A^{(n)}$ le sue righe e con $A_{(1)}, \dots, A_{(n)}$ le sue colonne; scriveremo, con notazione a blocchi,

$$A = (A_{(1)} A_{(2)} \ \dots \ A_{(n)})$$

oppure

$$A = \begin{pmatrix} A^{(1)} \\ A^{(2)} \\ \vdots \\ A^{(n)} \end{pmatrix}.$$

Scriveremo quindi

$$\det(A) = \det(A_{(1)} A_{(2)} \ \dots \ A_{(n)}) = \det \begin{pmatrix} A^{(1)} \\ A^{(2)} \\ \vdots \\ A^{(n)} \end{pmatrix}.$$

Con queste notazioni il determinante verrà considerato come una funzione di n vettori colonna oppure di n vettori riga.

6.2 TEOREMA *Sia $n \geq 1$ un intero e sia*

$$A = (a_{ij}) = (A_{(1)} A_{(2)} \ \dots \ A_{(n)}) = \begin{pmatrix} A^{(1)} \\ A^{(2)} \\ \vdots \\ A^{(n)} \end{pmatrix} \in M_n(\mathsf{K}).$$

Allora:

1) $\det({}^tA) = \det(A)$.

2) *Se* $A^{(i)} = cV + c'V'$, *per qualche* $1 \leq i \leq n$, $c, c' \in \mathsf{K}$, *cioè se la i-esima riga di A è combinazione lineare di due n-vettori riga, allora*

$$\det(A) = c \det \begin{pmatrix} A^{(1)} \\ \vdots \\ V \\ \vdots \\ A^{(n)} \end{pmatrix} + c' \det \begin{pmatrix} A^{(1)} \\ \vdots \\ V' \\ \vdots \\ A^{(n)} \end{pmatrix}.$$

Analogamente, se $A_{(i)} = cW + c'W'$ *per qualche* $1 \leq i \leq n$, $c, c' \in \mathsf{K}$, *dove W e W' sono due n-vettori colonna, si ha*

$$\det(A) = c \det(A_{(1)} \dots W \dots A_{(n)}) + c' \det(A_{(1)} \dots W' \dots A_{(n)}).$$

3) *Se la matrice* $B \in M_n(\mathsf{K})$ *è ottenuta da A scambiando tra loro due righe oppure due colonne, si ha* $\det(B) = -\det(A)$.

4) *Se A ha due righe oppure due colonne uguali, allora* $\det(A) = 0$.

5) $\det(\mathbf{I}_n) = 1$.

Dimostrazione

1) Si ha

$$\det({}^tA) = \sum_{p \in \sigma_n} \epsilon(p)\, a_{p(1)1} a_{p(2)2} \dots a_{p(n)n}. \qquad [6.2]$$

A meno del segno, gli addendi di [6.2] sono gli stessi di [6.1]; infatti il termine

$$a_{p(1)1}a_{p(2)2}\dots a_{p(n)n} \qquad [6.3]$$

può anche essere scritto nella forma seguente:

$$a_{1q(1)}a_{2q(2)}\dots a_{nq(n)} \qquad [6.4]$$

dove $q = p^{-1} \in \sigma_n$. Osservando poi che $\epsilon(p^{-1}) = \epsilon(p)$, si conclude che gli addendi di $\det(A)$ e di $\det({}^tA)$ sono gli stessi, cioè $\det(A) = \det({}^tA)$.

2) Le due affermazioni sono equivalenti per la (1), e quindi è sufficiente dimostrare la prima. Siano

$$V = (v_1 \ \dots \ v_n), \; V' = (v_1' \ \dots \ v_n').$$

Si ha

$$(a_{i1} \ a_{i2} \ \dots \ a_{in}) = (cv_1 + c'v_1' \quad cv_2 + c'v_2' \quad \dots \quad cv_n + c'v_n')$$

e

$$\det(A) = \sum_{p\in\sigma_n} \epsilon(p)\, a_{1p(1)}a_{2p(2)}\dots a_{np(n)} =$$

$$= \sum_{p\in\sigma_n} \epsilon(p)\, a_{1p(1)}\dots (cv_{p(i)} + c'v'_{p(i)})\dots a_{np(n)} =$$

$$= c\sum_{p\in\sigma_n} \epsilon(p)\, a_{1p(1)}\dots v_{p(i)}\dots a_{np(n)} + c'\sum_{p\in\sigma_n} \epsilon(p)\, a_{1p(1)}\dots v'_{p(i)}\dots a_{np(n)} =$$

$$= c\det\begin{pmatrix} A^{(1)} \\ \vdots \\ V \\ \vdots \\ A^{(n)} \end{pmatrix} + c'\det\begin{pmatrix} A^{(1)} \\ \vdots \\ V' \\ \vdots \\ A^{(n)} \end{pmatrix}.$$

3) Per la (1) è sufficiente dimostrare la (3) nel caso in cui B sia ottenuta da A scambiando due righe, siano esse la i-esima e la j-esima, dove $1 \le i < j \le n$. Posto $B = (b_{hk})$, si ha

$$\det(B) = \sum_{p\in\sigma_n} \epsilon(p)\, b_{1p(1)}\dots b_{ip(i)}\dots b_{jp(j)}\dots b_{np(n)} =$$

$$= \sum_{p\in\sigma_n} \epsilon(p)\, a_{1p(1)}\dots a_{jp(i)}\dots a_{ip(j)}\dots a_{np(n)} =$$

$$= \sum_{p\in\sigma_n} \epsilon(p)\, a_{1(tp)(1)}\dots a_{i(tp)(i)}\dots a_{j(tp)(j)}\dots a_{n(tp)(n)}$$

dove abbiamo denotato con t la trasposizione che scambia i con j. Poiché

$\epsilon(p) = -\epsilon(t\circ p)$ e poiché al variare di $p \in \sigma_n$, $t\circ p$ descrive tutto σ_n, si deduce:

$$\det(B) = \sum_{q\in\sigma_n} -\epsilon(q)\, a_{1q(1)}\dots a_{iq(i)}\dots a_{jq(j)}\dots a_{nq(n)} = -\det(A).$$

4) Supponiamo che A abbia due righe uguali. Scambiando tra loro tali righe si ottiene ancora la matrice A. Per la (3) si ha quindi $\det(A) = -\det(A)$, sicché $\det(A) = 0$.

5) L'unico addendo di $\det(\mathbf{I}_n)$ diverso da 0 è

$$a_{11}a_{22}\dots a_{nn} = 1.$$

Dal teorema 6.2 segue facilmente il risultato seguente.

6.3 Corollario *Se A, $B \in M_n(\mathsf{K})$, allora* $\det(AB) = \det(A)\det(B)$. *In particolare, se A è invertibile, allora* $\det(A^{-1}) = \det(A)^{-1}$.

Dimostrazione

Siano $A = (a_{ij})$ e

$$B = \begin{pmatrix} B^{(1)} \\ B^{(2)} \\ \vdots \\ B^{(n)} \end{pmatrix}.$$

Si ha, utilizzando la (2) e la (3) del teorema 6.2:

$$\det(AB) = \det\begin{pmatrix} a_{11}B^{(1)} + \dots + a_{1n}B^{(n)} \\ a_{21}B^{(1)} + \dots + a_{2n}B^{(n)} \\ \vdots \\ a_{n1}B^{(1)} + \dots + a_{nn}B^{(n)} \end{pmatrix} =$$

$$= \sum_{p\in\sigma_n} \det\begin{pmatrix} a_{1p(1)}B^{(p(1))} \\ a_{2p(2)}B^{(p(2))} \\ \vdots \\ a_{np(n)}B^{(p(n))} \end{pmatrix} = \sum_{p\in\sigma_n} a_{1p(1)}\dots a_{np(n)} \det\begin{pmatrix} B^{(p(1))} \\ B^{(p(2))} \\ \vdots \\ B^{(p(n))} \end{pmatrix} =$$

$$= \sum_{p\in\sigma_n} \epsilon(p) a_{1p(1)}\dots a_{np(n)} \det\begin{pmatrix} B^{(1)} \\ B^{(2)} \\ \vdots \\ B^{(n)} \end{pmatrix} = \det(A)\det(B).$$

L'ultima affermazione segue immediatamente dalla prima applicata al prodotto $\mathbf{I}_n = AA^{-1}$, tenuto conto del teorema 6.2(5).

Una proprietà fondamentale del determinante è la sua relazione con il rango, che è espressa dal seguente teorema.

6.4 TEOREMA *Sia $A \in M_n(\mathsf{K})$. Allora* $\det(A) \neq 0$ *se e solo se* $r(A) = n$.

Dimostrazione

Se $r(A) = n$, allora A è invertibile per il teorema 5.4. Dal corollario 6.3 segue che dev'essere $\det(A^{-1}) = \det(A)^{-1}$, e pertanto $\det(A) \neq 0$.

Supponiamo $r(A) < n$, cioè che le righe di A siano linearmente dipendenti. Salvo scambiare tra loro due righe di A, il che, per il teorema 6.2(3), non influisce sulla conclusione, possiamo supporre che

$$A^{(1)} = c_2A^{(2)} + \dots + c_nA^{(n)}, \qquad c_2, \dots, c_n \in \mathsf{K},$$

cioè che la prima riga sia combinazione lineare delle rimanenti righe di A. Per il teorema 6.2(2) si ha

$$\det(A) = c_2 \det\begin{pmatrix} A^{(2)} \\ A^{(2)} \\ \vdots \\ A^{(n)} \end{pmatrix} + c_3 \det\begin{pmatrix} A^{(3)} \\ A^{(2)} \\ \vdots \\ A^{(n)} \end{pmatrix} + \dots + c_n \det\begin{pmatrix} A^{(n)} \\ A^{(2)} \\ \vdots \\ A^{(n)} \end{pmatrix}.$$

Poiché ognuna delle matrici che compaiono a secondo membro ha due righe uguali, per il teorema 6.2(4) il suo determinante è 0. Pertanto

$$\det(A) = c_2 0 + c_3 0 + \dots + c_n 0 = 0.$$

6.5 DEFINIZIONE *Sia $M \in M_{m,n}(\mathsf{K})$. Un* minore *di M è il determinante di una sua sottomatrice quadrata. L'*ordine *del minore è l'ordine della sottomatrice quadrata corrispondente.*

Abbiamo il seguente utile corollario.

6.6 COROLLARIO *Sia $M \in M_{m,n}(\mathsf{K})$. Il rango di M è uguale al massimo ordine dei minori non nulli di M.*

Il corollario è immediata conseguenza dei teoremi 5.6 e 6.4.

Le seguenti ulteriori proprietà del determinante seguono facilmente dai teoremi precedenti.

6.7 PROPOSIZIONE *Sia $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathsf{K})$:*

1) *Se A ha una riga oppure una colonna nulla,* $\det(A) = 0$.

2) *Se $B \in M_n(\mathsf{K})$ è ottenuta da A sommando a una sua riga (colonna) un multiplo scalare di un'altra riga (colonna), allora* $\det(B) = \det(A)$.

Dimostrazione

1) Se A ha una riga, o una colonna, nulla, $r(A) < n$, e quindi $\det(A) = 0$ per il teorema 6.4.

2) Supponiamo che si abbia $B = (B_{(1)} \ \dots \ B_{(n)})$ con $B_{(i)} = A_{(i)} + cA_{(j)}$, per qualche $i \neq j$, e $B_{(k)} = A_{(k)}$ per ogni $k \neq i$. Allora

$$\det(B) = \det(A) + c\det(A_{(1)} \ \dots \ A_{(j)} \ \dots \ A_{(n)}) = \det(A) + c0 = \det(A)$$

perché $(A_{(1)} \ \dots \ A_{(j)} \ \dots \ A_{(n)})$ ha uguali la i-esima e la j-esima colonna, e quindi ha determinante uguale a 0. In modo simile si procede nel caso in cui $B^{(i)} = A^{(i)} + cA^{(j)}$.

Daremo ora una definizione che ha una notevole importanza pratica nel calcolo dei determinanti.

6.8 DEFINIZIONE *Data $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathsf{K})$, per ogni $1 \leq i, j \leq n$ sia $A(1 \dots \hat{\imath} \dots \dots n \mid 1 \dots \hat{\jmath} \dots n)$ la sottomatrice quadrata di ordine $n-1$ di A ottenuta cancellando la i-esima riga e la j-esima colonna.*

Il complemento algebrico *(o* cofattore*) dell'elemento a_{ij} di A è*

$$A_{ij} = (-1)^{i+j}\det(A(1 \dots \hat{\imath} \dots n \mid 1 \dots \hat{\jmath} \dots n)).$$

La matrice cofattore *di A è*

$$\mathrm{cof}(A) = (A_{ij}) \in M_n(\mathsf{K}).$$

Il risultato seguente fornisce un procedimento induttivo per calcolare il determinante di una matrice.

6.9 PROPOSIZIONE *Sia $A \in M_n(\mathsf{K})$. Per ogni $1 \leq i, j \leq n$ si ha*

$$\det(A) = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \dots + a_{in}A_{in} \qquad [6.5]$$

e

$$\det(A) = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \dots + a_{nj}A_{nj}. \qquad [6.6]$$

La [6.5] *e la* [6.6] *sono rispettivamente lo* sviluppo di $\det(A)$ secondo la i-esima riga *e* secondo la j-esima colonna.

Dimostrazione

Sostituendo A con la sua trasposta ci si riduce a dimostrare solo la [6.5].

Mediante $i-1$ scambi fra righe contigue di A si ottiene una matrice

$$A' = \begin{pmatrix} A'^{(1)} \\ A'^{(2)} \\ \vdots \\ A'^{(n)} \end{pmatrix}$$

la cui prima riga è $A'^{(1)} = A^{(i)}$, e le rimanenti righe sono nella stessa posizione relativa delle righe di A, cioè

$$\begin{pmatrix} A'^{(2)} \\ A'^{(3)} \\ \vdots \\ A'^{(n)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A^{(1)} \\ \vdots \\ A^{(i-1)} \\ A^{(i+1)} \\ \vdots \\ A^{(n)} \end{pmatrix}.$$

Si ha pertanto

$$\det(A') = (-1)^{i-1}\det(A).$$

Inoltre, per ogni $1 \le j \le n$:

$$A'_{1j} = (-1)^{j+1}\det[A'(2\dots n|1\dots\hat{j}\dots n)] =$$
$$= (-1)^{j+1}\det[A(1\dots\hat{i}\dots n|1\dots\hat{j}\dots n) = (-1)^{i+1}A_{ij}.$$

Quindi, se la [6.5] è vera per A', lo è anche per A. Quest'osservazione ci consente di limitarci a considerare il caso $i=1$, cioè a dimostrare lo sviluppo [6.5] di A secondo la prima riga.

A questo scopo consideriamo i termini della sommatoria [6.1] in cui compare a_{1j}, che sono della forma

$$\epsilon(p)\, a_{1j}a_{2p(2)}\dots a_{np(n)} \tag{6.7}$$

dove $p \in \sigma_n$ è una permutazione tale che $p(1)=j$. Ad ogni tale p possiamo far corrispondere la permutazione $q \in \sigma_{n-1}$ definita, per $k=1,\dots,n-1$, da

$$\begin{aligned} q(k) &= p(k+1) \qquad &&\text{se } p(k+1) < j \\ &= p(k+1)-1 &&\text{se } p(k+1) > j. \end{aligned} \tag{6.8}$$

Si ha

$$(-1)^{j-1}\epsilon(q) = \epsilon(p).$$

Infatti la permutazione $r \in \sigma_n$ definita da

$$r(1) = 1,$$
$$r(k) = q(k-1), \qquad k = 2,\dots,n$$

è ottenuta componendo p con $j-1$ trasposizioni di elementi contigui, e quindi soddisfa $\epsilon(r) = (-1)^{j-1}\epsilon(p)$. D'altra parte, per definizione, si ha evidentemente $\epsilon(q) = \epsilon(r)$.

Poniamo $B = (b_{hk}) = A(2\dots n|1\dots\hat{j}\dots n)$. Poiché al variare di $p \in \sigma_n$ tale che $p(1) = j$ la permutazione q definita dalla [6.8] descrive tutto σ_{n-1}, la somma dei termini [6.7] è uguale a

$$a_{1j}(-1)^{j-1}\sum_{q\in\sigma_{n-1}}\epsilon(q)\,b_{1q(1)}\dots b_{n-1\,q(n-1)} = a_{1j}(-1)^{j-1}\det(B) = a_{1j}A_{1j}.$$

In conclusione, la somma di tutti i termini della [6.1] è uguale a $\sum_j a_{1j}A_{1j}$, che è la [6.5] per $i=1$.

Nell'applicare la proposizione 6.9 è conveniente, quando possibile, scegliere una riga o una colonna nella quale compaiano degli zeri, allo scopo di abbreviare i calcoli.

Il seguente corollario fornisce in particolare un metodo pratico per calcolare l'inversa di una matrice $A \in \mathrm{GL}_n(\mathrm{K})$, alternativo a quello descritto nell'esempio 3.2(8).

6.10 Corollario *Per ogni $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathrm{K})$ sussiste l'identità*

$$A\,{}^t[\mathrm{cof}(A)] = \det(A)\mathbf{I}_n. \tag{6.9}$$

In particolare, se A è invertibile, si ha

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}\,{}^t[\mathrm{cof}(A)]. \tag{6.10}$$

Dimostrazione

La [6.9] è equivalente alle n^2 identità seguenti:

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik}A_{jk} = \det(A)\,\delta_{ij} \tag{6.11}$$

dove δ_{ij} è il simbolo di Kronecker. Infatti il primo membro è l'elemento di posto i, j della matrice $A\,{}^t[\mathrm{cof}(A)]$. Nel caso $i=j$ la [6.11] coincide con la [6.5], che è già stata dimostrata. Se $i \ne j$ la [6.11] è

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik}A_{jk} = 0. \tag{6.12}$$

Per la proposizione 6.9, il primo membro della [6.12] è lo sviluppo secondo la i-esima riga del determinante della matrice B ottenuta da A sostituendo la sua riga i-esima alla j-esima. Poiché B ha due righe uguali il suo determinante è 0, e pertanto la [6.12] è vera.

La [6.10] segue dalla [6.9] moltiplicando ambo i membri a sinistra per $\det(A)^{-1}A^{-1}$.

Il metodo dell'inversa, che abbiamo introdotto nel paragrafo 3 per risolvere un sistema di n equazioni lineari in n incognite, può ora essere formulato in un modo diverso, e più preciso, noto come *regola di Cramer*:

6.11 Corollario (Regola di Cramer) *Siano* $A = (a_{ij}) \in \mathrm{GL}_n(\mathsf{K})$, $\mathbf{b} = {}^t(b_1 \dots b_n)$ *un n-vettore colonna e*

$$A\mathbf{X} = \mathbf{b} \qquad [6.13]$$

il corrispondente sistema di n equazioni in n incognite. L'unica soluzione di [6.13], $\mathbf{x} = {}^t(x_1 \dots x_n)$, *è data dalla formula*

$$x_i = \frac{\sum_{k=1}^{n} b_k A_{ki}}{\det(A)}, \qquad i = 1, \dots, n. \qquad [6.14]$$

Dimostrazione

Basta ricordare la regola dell'inversa [3.16] che dà $\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b}$, e sostituire la [6.10] al posto di A^{-1}.

Si noti che il secondo membro della [6.14] ha per numeratore il determinante della matrice ottenuta da A sostituendo la colonna $\mathbf{b}$ al posto della colonna i-esima.

Descriveremo ora un metodo di calcolo dei determinanti che generalizza la proposizione 6.9. Allo scopo avremo bisogno della seguente generalizzazione della definizione 6.8.

6.12 Definizione *Sia* $A \in M_n(\mathsf{K})$, *e sia*

$$M = A(i_1 \dots i_k | j_1 \dots j_k)$$

una sottomatrice quadrata di ordine k di A. Il complemento algebrico (*o* cofattore) di *M è*

$$(-1)^{i_1 + \dots + i_k + j_1 + \dots + j_k} \det(A(\{1, \dots, n\} \setminus \{i_1, \dots, i_k\} | \{1, \dots, n\} \setminus \{j_1, \dots, j_k\}),$$

cioè è il determinante della sottomatrice quadrata di ordine n − k di A ottenuta cancellando le righe e le colonne di M, preso con il segno + o − a seconda che $i_1 + \dots + i_k + j_1 + \dots + j_k$ *sia pari o dispari.*

Nel caso particolare $k = 1$ si riottiene la definizione 6.8 di complemento algebrico di un elemento di A.

Dimostreremo ora un teorema che generalizza lo sviluppo del determinante secondo una riga o una colonna.

6.13 Teorema (Laplace) *Sia* $A \in M_n(\mathsf{K})$, *e siano assegnate* $k \le n$ *righe (colonne) di A. Allora* $\det(A)$ *è uguale alla somma dei prodotti dei minori di ordine k di A estratti dalle righe (colonne) assegnate per i corrispondenti cofattori.*

Dimostrazione

La daremo nel caso delle righe, lasciando al lettore l'immediata estensione al caso delle colonne.

Denotiamo con $D(A)$ la somma indicata nell'enunciato, che vogliamo dimostrare essere uguale a $\det(A)$. Il prodotto di un minore di ordine k estratto dalle k righe assegnate per il corrispondente complemento algebrico è una somma di $k!(n-k)!$ termini, perché il minore è un determinante di ordine k, e quindi ottenuto sommando $k!$ termini, mentre il cofattore è un determinante di ordine $n-k$, quindi somma di $(n-k)!$ termini. Inoltre il numero dei minori di ordine k distinti che si possono estrarre dalle k righe assegnate è

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Pertanto $D(A)$ è somma di $\binom{n}{k} k!(n-k)! = n!$ termini. Poiché anche $\det(A)$ è somma di $n!$ termini, sarà sufficiente dimostrare che ogni termine di $D(A)$ appare almeno una volta in $\det(A)$.

Supponiamo dapprima che le righe assegnate siano $A^{(1)}, A^{(2)}, \dots, A^{(k)}$. I termini di $D(A)$ sono prodotti di un termine di $\det(A(1 \dots k | j_1 \dots j_k)$ per uno di $\det(A(k+1 \dots n | \{1, \dots, n\} \setminus \{j_1, \dots, j_k\})$, per qualche scelta di $j_1, \dots, j_k$, moltiplicati per $(-1)^{1 + \dots + k + j_1 + \dots + j_k}$. Consideriamo il caso particolare in cui $\{j_1, \dots, j_k\} = \{1, \dots, k\}$. Un termine di $D(A)$ corrispondente è della forma

$$\begin{aligned}(-1)^{1+\dots+k+1+\dots+k}[\epsilon(s)\, a_{1s(1)} \dots a_{ks(k)}]\, [\epsilon(t)\, a_{k+1\,k+t(1)} \dots a_{n\,k+t(n-k)}] = \\ = \epsilon(s)\epsilon(t)\, [a_{1s(1)} \dots a_{k\,s(k)} a_{k+1\,k+t(1)} \dots a_{n\,k+t(n-k)}]\end{aligned} \qquad [6.15]$$

dove $s \in \sigma_k$, $t \in \sigma_{n-k}$.

Per riconoscere che [6.15] è un termine di $\det(A)$ osserviamo che la permutazione

$$u = \begin{pmatrix} 1 & \dots & k & k+1 & \dots & n \\ s(1) & \dots & s(k) & k+t(1) & \dots & k+t(n-k) \end{pmatrix}$$

ha segno uguale a $\epsilon(s)\epsilon(t)$, perché ogni indice $s(h)$ è minore di ogni indice $t(\ell)$, e quindi il numero di trasposizioni di cui u è prodotto è la somma del numero di trasposizioni di s e di quelle di t. Da ciò segue che [6.15] è un termine di $\det(A)$.

Per dimostrare che il prodotto di un termine di $\det(A(1 \dots k | j_1 \dots j_k)$ per uno di $\det(A(k+1 \dots n | \{1, \dots, n\} \setminus \{j_1, \dots, j_k\})$ moltiplicati per $(-1)^{1 + \dots + k + j_1 + \dots + j_k}$, per *scelta arbitraria di* $1 \le j_1 < j_2 < \dots < j_k \le n$, è un termine di $\det(A)$, scambiamo tra loro opportunamente le colonne di A in modo da ottenere una matrice B in cui la j_1-esima colonna, la j_2-esima colonna ecc.

di A si trovino rispettivamente come prima, seconda, ..., k-esima colonna. Così facendo si operano $(j_1 - 1) + (j_2 - 1) + (j_k - 1) = j_1 + \dots + j_k - (1 + \dots + k)$ scambi di colonne, e quindi

$$\det(B) = (-1)^{j_1 + \dots + j_k - (1 + \dots + k)} \det(A) = (-1)^{1 + \dots + k + j_1 + \dots + j_k} \det(A).$$

Il termine di $D(A)$ che stiamo considerando è uguale a $(-1)^{1 + \dots + k + j_1 + \dots + j_k}$ per un termine di $D(B)$ del tipo che abbiamo considerato nella prima parte della dimostrazione, e quindi è uguale a $(-1)^{1 + \dots + k + j_1 + \dots + j_k}$ per un termine di $\det(B)$, cioè è uguale a un termine di $\det(A)$.

Se le righe assegnate sono $A^{(i_1)}, A^{(i_2)}, \dots, A^{(i_k)}$, consideriamo la matrice C ottenuta da A con opportune trasposizioni delle righe in modo che la i_1-esima riga, la i_2-esima riga ecc. di A siano rispettivamente prima, seconda, ..., k-esima riga di C. Il numero di inversioni effettuate è

$$(i_1 - 1) + (i_2 - 1) + \dots + (i_k - 1) = i_1 + \dots i_k - (1 + \dots + k),$$

e quindi $\det(C) = (-1)^{i_1 + \dots + i_k - (1 + \dots + k)} \det(A)$. D'altra parte ogni termine di $D(C)$ è uguale a $(-1)^{i_1 + \dots + i_k - (1 + \dots + k)}$ per un termine di $D(A)$, e quindi

$$D(C) = (-1)^{i_1 + \dots + i_k - (1 + \dots + k)} D(A).$$

Confrontando otteniamo $D(A) = \det(A)$, come si voleva.

Il procedimento per calcolare il determinante di una matrice quadrata descritto dal teorema 6.13 è chiamato *metodo di Laplace* o *sviluppo di Laplace*. Esso è particolarmente utile quando la matrice A di cui si vuole calcolare il determinante ha molti elementi uguali a 0. Consideriamo ad esempio la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Sviluppando $\det(A)$ con il metodo di Laplace rispetto alle prime due righe si trova:

$$\det(A) = (-1)^6 \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} + (-1)^7 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} -3 & 4 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$= 5 \times (-9) - (-4) \times 7 = -17.$$

Il calcolo di $\det(A)$ mediante lo sviluppo secondo una riga o una colonna sarebbe stato più laborioso.

6.14 *Osservazioni ed esempi*

1. Sia A una matrice triangolare superiore (inferiore). Sviluppandone il determinante secondo la prima colonna (la prima riga), si trova subito, procedendo per induzione su n, che $\det(A)$ è uguale al prodotto degli elementi della diagonale principale.

2. Sia data una matrice $M \in M_{m,n}(\mathrm{K})$ e supponiamo di volerne calcolare il rango utilizzando il corollario 6.6. Supposto che M non sia la matrice nulla, e quindi che il suo rango sia almeno 1, si dovranno calcolare i minori di ordine via via crescente, a partire dall'ordine 2. Quando per un certo r si sarà trovato un minore di ordine r non nullo, mentre tutti i minori di ordine $r+1$ si annullano (oppure non ce ne sono se $r = \min(m, n)$), si concluderà che $r(M) = r$. Infatti dall'annullarsi di tutti i minori di ordine $r+1$ discende l'annullarsi dei minori di ordine superiore: ciò segue subito per induzione su s sviluppando ogni minore di ordine $s > r$ secondo una sua riga o una sua colonna.

Il calcolo del rango può essere semplificato notevolmente se si tiene conto del cosiddetto *principio dei minori orlati*, cioè della seguente osservazione.

Sia $B = M(i_1 \dots i_r | j_1 \dots j_r)$ una sottomatrice quadrata di un certo ordine r della matrice M, tale che $\det(B) \neq 0$. Supponiamo che ogni sottomatrice quadrata di ordine $r+1$ di M ottenuta aggiungendo a B una riga e una colonna di M (fig. 6.1) abbia determinante nullo, cioè che i cosiddetti *minori orlati di B* siano tutti nulli. Allora M ha rango r.

Infatti dall'ipotesi $\det(B) \neq 0$ discende che le colonne j_1-esima, ..., j_r-esima di M sono linearmente indipendenti, e pertanto la condizione sui minori orlati implica che ogni altra colonna di M è combinazione lineare delle colonne j_1-esima, ..., j_r-esima. Quindi M ha rango r.

Ad esempio, la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

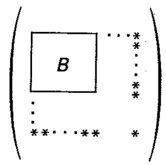

Figura 6.1

ha rango 2. Infatti la sottomatrice

$$B = M(12|13) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

ha $\det(B) = -2$, e quindi $r(M) \geq 2$; inoltre i due minori orlati sono:

$$\det(M(123|123) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

e

$$\det(M(123|134) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 0,$$

e quindi $r(M) = 2$.

3. Il determinante, per la sua stessa definizione [6.1], è ben definito anche quando gli elementi della matrice quadrata A appartengono a un dominio qualsiasi D. Ovviamente il determinante di una matrice siffatta è ancora un elemento del dominio D. Ad esempio il determinante di una matrice in $M_n(\mathsf{K}[X])$, cioè ad elementi polinomi in una indeterminata X a coefficienti in K, è un polinomio di $\mathsf{K}[X]$; se $A \in M_n(\mathsf{Z})$, allora $\det(A)$ è un numero intero ecc. Noi utilizzeremo quest'osservazione e considereremo per esempio matrici a elementi polinomi di una o più variabili, i loro determinanti quando esse sono quadrate, i minori ecc.

4. Consideriamo il seguente sistema di tre equazioni in tre incognite:

$$\begin{aligned} 2X_1 + 3X_2 - X_3 &= 1 \\ X_1 + 4X_2 + 2X_3 &= 2 \\ 3X_1 - X_2 - X_3 &= 3. \end{aligned}$$

Il determinante della matrice dei coefficienti è

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & 4 & 2 \\ 3 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 30 \neq 0$$

e quindi il sistema ammette un'unica soluzione (x_1, x_2, x_3), data dalla regola di

Cramer:

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 3 & -1 & -1 \end{vmatrix}}{\det(A)} = 36/30 = 6/5$$

$$x_2 = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & -1 \end{vmatrix}}{\det(A)} = 6/30 = -1/5$$

$$x_3 = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & 2 \\ 3 & -1 & 3 \end{vmatrix}}{\det(A)} = 24/30 = 4/5.$$

5. Supponiamo assegnato un sistema di m equazioni in n incognite, in cui i coefficienti delle incognite e i termini noti siano funzioni di uno o più parametri variabili in K. Per ogni valore assunto dai parametri si ottiene un diverso sistema a coefficienti in K di cui si vuole accertare la compatibilità e ricercare le eventuali soluzioni: lo studio dei casi che si presentano e la ricerca delle rispettive soluzioni si dice la *discussione del sistema assegnato*. Il modo più efficace e naturale di procedere in questo caso è quello di utilizzare il teorema 5.7 analizzando i valori possibili del rango della matrice dei coefficienti e della matrice orlata in funzione dei parametri. Una volta stabiliti i valori dei parametri per cui il sistema è compatibile, e in ogni caso l'infinità delle soluzioni, si procederà a risolverlo in ciascun caso.

Consideriamo ad esempio il sistema a coefficienti reali nelle incognite X, Y, Z:

$$\begin{aligned} X - Y + mZ &= 0 \\ mY - Z &= 0 \\ -X + Y + Z &= m. \end{aligned}$$

Il determinante della matrice dei coefficienti è $m^2 + m$, che si annulla per $m = 0$, -1. Per ogni $m \neq 0, -1$ la matrice dei coefficienti ha rango 3 e quindi il sistema è compatibile, per il teorema 5.7, e possiede l'unica soluzione

$$\left(1 - m, \frac{1}{m+1}, \frac{m}{m+1}\right).$$