Geometria I. Proff. P. Piazza e P. Piccinni a.a. 2017-18.

Foglio 5 del 10 Maggio 2018

Esercizio 1. Nel piano proiettivo numerico reale $\mathbf{P}^2_{\mathbf{R}}$, con coordinate omogenee $[x_0, x_1, x_2]$, siano assegnati i punti $Q_0 = [1, 1, 1]$, $Q_1 = [1, 1, -1]$, $Q_2 = [1, -1, 1]$, $Q_3 = [1, -1, -1]$.
i) Verificare che Q_0, Q_1, Q_2, Q_3 sono in posizione generale, ovvero a tre a tre non allineati.
ii) Scrivere le equazioni cartesiane delle rette r per Q_0, Q_1 e s per Q_2, Q_3.
iii) Determinare le coordinate omogenee del punto $A = r \cap s$.

Esercizio 2. Nello spazio proiettivo $\mathbf{P}^3_{\mathbf{R}}$, con coordinate omogenee $[x_0, x_1, x_2, x_3]$, siano dati il piano

$$\alpha : \quad 3x_0 + x_2 + x_3 = 0,$$

e la retta

$$r : \quad x_0 + x_1 = 0, \;\; x_1 + x_2 + x_3 = 0.$$

i) Determinare le coordinate omogenee di $P_0 = \alpha \cap r$;
ii) Assumendo il piano $x_0 = 0$ come piano improprio, scrivere le equazioni cartesiane di α e di r nelle coordinate affini non omogenee $x = \frac{x_1}{x_0}$, $y = \frac{x_2}{x_0}$, $z = \frac{x_3}{x_0}$ di $A^3_{\mathbf{R}}$;.
iii) Stabilire se r e α sono paralleli in $A^3_{\mathbf{R}}$.

Esercizio 3. Siano r_1, r_2, s_1, s_2 rette proiettive in un piano proiettivo $\mathbf{P}^2_{\mathbb{K}}$. Siano $r_1 \cap r_2 =: P$, $s_1 \cap s_2 =: Q$ con $P \notin s_1$, $P \notin s_2$, $Q \notin r_1$, $Q \notin r_2$ nonché $P \neq Q$. Sia ancora $B_{ij} := r_i \cap s_j$.

(1) Scegliere in $\mathbf{P}^2_{\mathbb{K}}$ una "retta impropria" in modo che il piano affine $A^2_{\mathbb{K}}$ suo complementare contenga tutti i punti B_{ij} e in modo che essi formino in $A^2_{\mathbb{K}}$ un parallelogramma.
(2) Stabilire poi quante possibilità ci sono per scegliere un tal piano affine $A^2_{\mathbb{K}}$ con la proprietà indicata (motivare, come sempre, la risposta).

Esercizio 4. Sia V uno spazio vettoriale su $\mathbb{K}$ e $\phi : \mathbf{P}(V) \to \mathbf{P}(V)$ una proiettività. Dimostrare che

(1) Se $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ oppure $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ e se $\dim(\mathbf{P}(V))$ è pari, allora ϕ ha un punto fisso, ovvero $\phi(P) = P$ per un certo $P \in \mathbf{P}(V)$.
(2) Dare un'esempio di proiettività $\psi : \mathbf{P}^1_{\mathbb{R}} \to \mathbf{P}^1_{\mathbb{R}}$ che non ha un punto fisso.

Esercizio 5. Si consideri nello spazio proiettivo $P(\mathbb{R}^3)$, con coordinate proiettive omogenee $[x_0, x_1, x_2, x_3]$, i punti

$$P_1 = [2, 1, 1, 1], \quad P_2 = [0, 1, -1, -1], \quad P_3 = [0, 2, 1, 1],$$

$$Q_1 = [1, 0, -1, 1], \quad Q_2 = [2, 1, 0, 4].$$

i) Scrivere l'equazione cartesiana del piano α passante per P_1, P_2, P_3, e le equazioni cartesiane della retta r passante per $Q_1 Q_2$.

ii) Determinare le coordinate del punto $S = \alpha \cap r$.

iii) Stabilire se S è allineato con una coppia di punti opportunamente scelti tra P_1, P_2, P_3.

Esercizio 6. Nello spazio proiettivo $\mathbf{P}^3_{\mathbf{R}}$ con coordinate omogenee $[x_0, x_1, x_2, x_3]$, siano assegnati i punti $P_1[0, -1, 1, 1]$, $P_2[0, 1, 1, 0]$ ed il piano $p : x_0 + x_1 + x_2 + x_3 = 0$.
i) Scrivere equazioni cartesiane in coordinate omogenee della retta r passante per P_1 e P_2 e dedurne che r è una retta appartenente al piano improprio $\pi_\infty : x_0 = 0$.
ii) Scrivere equazioni parametriche omogenee di r.
iii) Determinare il punto $P = r \cap p$.

Esercizio 7. Nel piano proiettivo numerico reale $P(\mathbb{R}^3)$, con coordinate omogenee $[x_0, x_1, x_2]$, siano assegnati i punti $P'_0 = [1, 1, 1]$, $P'_1 = [1, 1, -1]$, $P'_2 = [1, -1, 1]$, $U' = [1, -1, -1]$.
i) Verificare che P'_0, P'_1, P'_2, U' sono in posizione generale.
ii) Considerando il riferimento proiettivo che ammette i punti P'_0, P'_1, P'_2 come punti fondamentali e U' come punto unità, stabilire le formule di trasformazione di coordinate di punto dalle sue coordinate omogenee $[x'_0, x'_1, x'_2]$ a quelle $[x_0, x_1, x_2]$ del riferimento canonico.
iii) Scrivere nelle coordinate (x'_0, x'_1, x'_2) l'equazione cartesiana della retta $r : x_0 + x_1 + x_2 = 0$.