Geometria I. a.a. 2017-18.
Proff. Paolo Piazza e Paolo Piccinni

Foglio di Esercizi n.4.
Consegna il giorno 2/5/2018 in Aula IV e in Aula V, ore 14.

**Esercizio 1.**
Nello spazio euclideo $E^3$ con coordinate cartesiane $(x, y, z)$ determinare equazioni cartesiane per il piano passante per il punto di coordinate $(-1, 0, 1)$ ed ortogonale alla retta di equazioni cartesiane

$$\begin{cases} x + z + 2 = 0 \\ x - y + 3 = 0 \end{cases}$$

**Esercizio 2.**
Siano $A, B, C, D$ i punti di coordinate

$$A = (1, 2, 2), \quad B = (2, 1, 2), \quad C = (2, 2, 1), \quad D = (1, 1, 1).$$

**(i).** Si verifichi che che $A, B, C$ non sono allineati e che $A, B, C, D$ non sono complanari.
Scrivere un'equazione cartesiana del piano $\alpha$ contenente $A, B, C$.
**(ii).** Calcolare la distanza tra $\alpha$ e $D$.

**Esercizio 3.**
Nello spazio euclideo $E^3$ con coordinate cartesiane $(x, y, z)$ si consideri la retta $s$ di equazioni cartesiane

$$\begin{cases} x + 2z - 1 = 0 \\ y - z + 2 = 0 \end{cases} .$$

Determinare i punti di $s$ che distano $\sqrt{3}$ dall'origine.

**Esercizio 4.**
Consideriamo uno spazio euclideo $E$ di dimensione 2 su uno spazio vettoriale euclideo $(V, < , >)$ con riferimento cartesiano $O\underline{e}_1\underline{e}_2$ fissato e coordinate associate $(x_1, x_2)$. Sia $r$ la retta di equazione cartesiana $3x_1 + 6x_2 + 5 = 0$. Sia $O'$ il punto di coordinate $(-4, 1)$ e siano $\underline{f}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\underline{e}_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\underline{e}_2$, $\quad \underline{f}_2 = -\frac{1}{\sqrt{2}}\underline{e}_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\underline{e}_2$ vettori di $V$.
**(i).** Verificare che $O'\underline{f}_1\,\underline{f}_2$ è un riferimento cartesiano di $E$. Siano $(y_1, y_2)$ le coordinate associate a tale riferimento.
**(ii)** Determinare le formule di cambiamento di coordinate, dalle $(x_1, x_2)$ alle $(y_1, y_2)$ e viceversa.
**(iii).** Determinare l'equazione cartesiana della retta $r$ nel riferimento $O'\underline{f}_1\,\underline{f}_2$.

**Esercizio 5.**
Nello spazio euclideo $E^3$ con coordinate cartesiane $(x, y, z)$ sono date le rette

$$r : \begin{cases} 2x - y + z = 1 \\ x + y + 3z = 2 \end{cases} \qquad s : \begin{cases} x = 2 - t \\ y = 1 + 3t \\ z = -1 + t \end{cases}$$

Calcolare la distanza fra $r$ ed $s$.

**Esercizio 6.**
Verificare che i punti $P_1(-1, 1, 2)$, $P_2(0, 1, 1)$, $P_3(1, 2, 0)$, $P_4(0, 2, 1)$ sono vertici consecutivi di un parallelogramma.
Calcolare l'area di tale parallelogramma (può essere utile la nozione di prodotto vettoriale...).
Calcolare l'area della proiezione ortogonale sul piano $xy$ del parallelogramma $P_1P_2P_3P_4$.

**Esercizio 7.**
Sia $\mathbf{A}$ uno spazio affine e siano $Q_1$ e $Q_2$ due suoi punti distinti. I punti del segmento $Q_1Q_2$ sono, per definizione, i punti $Q(s)$, $s \in [0, 1]$, univocamente determinati dalla relazione: $\overrightarrow{Q_1Q(s)} = s\overrightarrow{Q_1Q_2}$. Fate una figura.

Un sottoinsieme $C$ di $\mathbf{A}$ è convesso se contenendo due punti contiene tutto il segmento che li congiunge. Dimostrare che se $C \subset \mathbf{A}$ è un insieme convesso e $f \in \mathrm{Aff}(\mathbf{A})$ allora $f(C) \subset \mathbf{A}$ è anche convesso.

**Esercizio 8.**
Consideriamo lo spazio affine numerico $A^2(\mathbb{R})$ con riferimento canonico affine fissato. Decidere se esiste un'affinità $f : A^2(\mathbb{R}) \to A^2(\mathbb{R})$ tale che

$$f(2,1) = (1,2)\,, \quad f(-1,-1) = (1,1)\,, \quad f(0,1) = (2,-1)$$

ed in caso affermativo determinarla.