

Esercizio 1. Sia (V, \langle, \rangle) uno spazio vettoriale euclideo di dimensione n e sia U un suo sottospazio di dimensione k . Vale la decomposizione $V = U \oplus U^\perp$. Sia $\underline{v} \in V$ e sia $\underline{v} = \underline{u} + \underline{u}^\perp$ la sua decomposizione secondo $V = U \oplus U^\perp$.

(1.1) Verificare che la legge

$$V \ni \underline{v} \rightarrow \underline{u} \in V$$

definisce un operatore **lineare** $P_U : V \rightarrow V$, detto *proiezione ortogonale su U* . Per definizione $P_U(\underline{v}) = \underline{u}$. Verificare che la legge

$$V \ni \underline{v} \rightarrow \underline{u} - \underline{u}^\perp \in V$$

definisce un operatore lineare $S_U : V \rightarrow V$ detto *simmetria ortogonale rispetto a U* . Quindi, per definizione, $S_U(\underline{v}) = \underline{u} - \underline{u}^\perp$.

Analogamente abbiamo

$$P_{U^\perp}(\underline{v}) := \underline{u}^\perp, \quad S_{U^\perp}(\underline{v}) = -\underline{u} + \underline{u}^\perp,$$

la proiezione ortogonale su U^\perp e la simmetria ortogonale rispetto a U^\perp .

Considerate $V = \mathbb{R}^2$, U uguale all'asse x ; \underline{v} un vettore di coordinate strettamente positive; su un disegno indicate $P_U(\underline{v})$, $P_{U^\perp}(\underline{v})$, $S_U(\underline{v})$, $S_{U^\perp}(\underline{v})$.

(1.2) Sia $\{\underline{u}_1, \dots, \underline{u}_k\}$ una base ortonormale di U ; verificare che

$$P_U(\underline{v}) = \sum_{j=1}^k \langle \underline{v}, \underline{u}_j \rangle \underline{u}_j.$$

(1.3) Verificare che in $\text{End}(V)$ sussistono le seguenti identità

$$P_U + P_{U^\perp} = \text{Id}_V, \quad (P_U)^2 = P_U, \quad (P_{U^\perp})^2 = P_{U^\perp} \quad (0.1)$$

dove $T^2 := T \circ T$ per un operatore $T \in \text{End}(V)$ e dove Id_V denota l'operatore identità: $\text{Id}_V(\underline{v}) = \underline{v}$. Verificate anche che

$$S_U = \text{Id}_V - 2P_{U^\perp}; \quad S_{U^\perp} = 2P_U^\perp - \text{Id}_V \quad (0.2)$$

$$(S_U)^2 = \text{Id}_V; \quad (S_{U^\perp})^2 = \text{Id}_V \quad (0.3)$$

(1.4) Sia $V = \mathbb{R}^2$ con prodotto scalare canonico. Determinare la matrice associata nella base canonica all'operatore di simmetria ortogonale rispetto alla retta W di equazioni cartesiane $2x_1 - x_2 = 0$.

(1.5) Verificare che P_U e P_{U^\perp} sono diagonalizzabili con autovalori 1 e 0 e che $V_{P_U}(0) = U^\perp$, $V_{P_U}(1) = U$; $V_{P_{U^\perp}}(0) = U$, $V_{P_{U^\perp}}(1) = U^\perp$.

Verificare che S_U e S_{U^\perp} sono diagonalizzabili con autovalori 1 e -1 e che $V_{S_U}(1) = U$, $V_{S_U}(-1) = U^\perp$; $V_{S_{U^\perp}}(1) = U^\perp$, $V_{S_{U^\perp}}(-1) = U$.

(1.6) Verificare che P_U ed S_U (e quindi anche P_{U^\perp} e S_{U^\perp}) sono operatori simmetrici.

(1.7) Verificare che S_U (e quindi S_{U^\perp}) è un operatore ortogonale.

Esercizio 2. Spazio affine tridimensionale, con riferimento affine fissato $RA(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Si considerino i quattro punti:

$$P_1(-1, 1, 1), \quad P_2(4, 1, 0), \quad P_3(1, 0, 0), \quad P_4(-4, 0, 1).$$

i) Verificare che P_1, P_2, P_3, P_4 sono complanari e scrivere l'equazione del piano α da essi individuato.

ii) Verificare che P_1, P_2, P_3, P_4 sono vertici consecutivi di un parallelogramma contenuto in α ¹

iii) Scrivere le equazioni dei piani $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4$, contenenti le facce laterali della piramide di base il parallelogramma $P_1P_2P_3P_4$ e vertice nell'origine O .

¹Per definizione un quadrilatero è un parallelogramma se ha i lati opposti paralleli (i lati opposti sono i lati non consecutivi).