Geometria 1. a.a. 2019-2020.

Prof. Paolo Piazza

Esercizi supplementari sugli spazi vettoriali euclidei.

Esercizio 1. Dimostrare che se $A \in SO(3)$, $A \neq I_3$, allora A è la rotazione di un angolo $\theta \in (0, 2\pi)$ attorno ad una retta $\mathbb{R}\underline{u}$ in $\mathbb{R}^3$. Più esplicitamente, esiste una base ortonormale $\mathcal{F} = \{\underline{f}_1, \underline{f}_2, \underline{f}_3\}$ di $(\mathbb{R}^3, \bullet)$, con $\underline{f}_1 = \underline{u}$, tale che la matrice associata ad L_A nella base $\mathcal{F}$ sia

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & \sin\theta \\ 0 & -\sin\theta & \cos\theta \end{vmatrix}.$$

Equivalentemente: data $A \in SO(3)$, $A \neq I_3$, esiste una matrice ortogonale $M \in O(3)$, esiste $\theta \in (0, 2\pi)$ tali che

$$M^{-1}AM = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{vmatrix}.$$

Suggerimenti. Fate vedere che esiste un autovalore uguale a 1 e sia $\underline{f}_1$ un autovettore di lunghezza unitaria associato a $\lambda = 1$ [1].
Trattate separatamente il caso in cui le altre due radici del polinomio caratteristico siano reali.
Supponete ora che le altre due radici del polinomio caratteristico siano complesse coniugate: λ e $\overline{\lambda}$, $\lambda \neq \overline{\lambda}$.
Considerate $\zeta \in \mathbb{C}^3$ tale che $L_A^{\mathbb{C}}\zeta = \lambda\zeta$, con $L_A^{\mathbb{C}}\zeta := A\zeta$.
Considerate poi

$$\frac{\zeta + \overline{\zeta}}{2} \quad \text{e} \quad \frac{\zeta - \overline{\zeta}}{2i}....$$

Esercizio 2 (facoltativo). Sia $(V, < , >)$ uno spazio vettoriale euclideo di dimensione 3; lo orientiamo tramite una scelta di base ortonormale $\{\underline{i}, \underline{j}, \underline{k}\}$; siano (x, y, z) le coordinate associate. Sappiamo che è definita in V un'operazione di prodotto vettoriale $\wedge : V \times V \to V$.

Esercizio 2.1. Sia $\underline{a} = a_1\underline{i} + a_2\underline{j} + a_3\underline{k}$ un fissato vettore di V. Si consideri l'applicazione $T_{\underline{a}} : V \longrightarrow V$ che associa a $\underline{v}$ il vettore $\underline{a} \wedge \underline{v}$: $T_{\underline{a}}(\underline{v}) := \underline{a} \wedge \underline{v}$.

(1) Verificare che $T_{\underline{a}}$ è lineare.

(2) Scrivere la matrice associata a $T_{\underline{a}}$ nella base ortonormale fissata. Questa matrice dipende dalle cordinate di $\underline{a}$. La denotiamo $A_{T_{\underline{a}}}$

(3) Determinare il nucleo di $T_{\underline{a}}$ e *la dimensione* dell'immagine di $T_{\underline{a}}$.

Esercizio 2.2. Si consideri l'applicazione

$$F : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathrm{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$$

definita da

$$\underline{a} \longrightarrow A_{T_{\underline{a}}}$$

con $A_{T_{\underline{a}}}$ la matrice di cui in (2). Verificare che F è un'applicazione lineare. Trovare il nucleo di F. Descrivere l'immagine di F. Dare una formula che leghi $F(\underline{a} \wedge \underline{b})$ ed il prodotto righe per colonne di $F(\underline{a})$ con $F(\underline{b})$ e di $F(\underline{b})$ con $F(\underline{a})$

Sia V uno spazio vettoriale di dimensione n.
Definizione. V è un'**algebra** se esiste una *moltiplicazione fra vettori*, la denotiamo con $\star$, che è distributiva:

$$(\lambda\underline{v} + \mu\underline{w}) \star \underline{z} = \lambda(\underline{v} \star \underline{z}) + \mu(\underline{w} \star \underline{z})$$
$$\underline{z} \star (\lambda\underline{v} + \mu\underline{w}) = \lambda(\underline{z} \star \underline{v}) + \mu(\underline{z} \star \underline{w}).$$

Denotiamo con $(V, \star)$ una tale algebra.

[1] Potete dare come noto che un polinomio di grado dispari ammette sempre una radice reale.

Un esempio di algebra è dato da $V = \mathrm{Hom}(W, W) \equiv \mathrm{End}(W)$, con W un qualsiasi spazio vettoriale. In questo caso la moltiplicazione $\star$ è per definizione uguale alla composizione di applicazioni: $T \star S := T \circ S$. Un altro esempio è fornito da $V = \mathrm{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ con prodotto uguale per definizione al prodotto righe per colonne.
In questi due esempi il prodotto fra vettori è associativo; in generale però l'associatività non fa parte della definizione di algebra. Ad esempio $(V, <\,,\,>)$ di dimensione 3 orientato con il prodotto dato dal prodotto vettoriale è un' algebra ma *non* è associativa.
Definizione. $(V, \star)$ è un'**algebra di Lie** [2] se valgono le seguenti due proprietà addizionali :

$$\underline{v} \star \underline{w} = -\underline{w} \star \underline{v}$$
$$(\underline{v} \star \underline{w}) \star \underline{z} + (\underline{w} \star \underline{z}) \star \underline{v} + (\underline{z} \star \underline{v}) \star \underline{w} = 0.$$

La prima è la proprietà di *anticommutazione*. La seconda è detta "identità di Jacobi". Le algebre di Lie giocano un ruolo fondamentale in Matematica e in Fisica.

Esercizio 2.3. Lo spazio vettoriale euclideo tridimensionale orientato V con il prodotto fra vettori definito dal prodotto vettoriale $\wedge$ è un'algebra di Lie di dimensione 3.
Suggerimento. La proprietà distributiva e di anticommutazione sono note; per dimostrare l'identità di Jacobi si usa, ad esempio, la seguente identità:

$$(\underline{v}_1 \wedge \underline{v}_2) \wedge \underline{v}_3 = (< \underline{v}_1, \underline{v}_3 >)\underline{v}_2 - (< \underline{v}_2, \underline{v}_3 >)\underline{v}_1$$

Dimostrate quindi quest'ultima identità e poi utilizzatela per dimostrare l'identità di Jacobi.

Esercizio 2.4.
(i) Verificare che $\mathrm{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$ con il prodotto

$$A \star B := A \cdot B - B \cdot A$$

(con $\cdot$ = prodotto righe per colonne) è un'algebra di Lie di dimensione 9.
(ii) Verificare che $\mathcal{A}_{3\times 3}(\mathbb{R}) = \{A \in \mathrm{M}_{3\times 3}(\mathbb{R}) | A = -A^T\}$ con lo stesso prodotto è un'algebra di Lie di dimensione 3.

Definizione: Un omomorfismo fra due algebre $(V, \star)$ e $(W, \odot)$ è un'applicazione *lineare* $S : V \longrightarrow W$ che rispetta il prodotto: $S(\underline{a} \star \underline{b}) = S(\underline{a}) \odot S(\underline{b})$. S è un isomorfismo di algebre se inoltre S è biunivoco (iniettivo e suriettivo). Se $(V, \star)$ e $(W, \odot)$ sono algebre di Lie ed S è un isomorfismo lineare che rispetta il prodotto allora si dice che S è un *isomorfismo di algebre di Lie.*

Esercizio 2.5. Mettendo insieme gli esercizi precedenti scrivete una dimostrazione per il seguente

Teorema. Sia V uno spazio vettoriale euclideo tridimensionale con una fissata orientazione. Sia $(V, \wedge)$ l'algebra di Lie definita considerando come prodotto fra vettori il prodotto vettoriale $\wedge$. Sia $(\mathcal{A}_{3\times 3}(\mathbb{R}), \star)$ l'algebra di Lie delle matrici antisimmetriche con prodotto $\star$ definito da $A \star B = A \cdot B - B \cdot A$. Esiste un isomorfismo di algebre di Lie

$$F : (V, \wedge) \to (\mathcal{A}_{3\times 3}, \star)$$

Suggerimento: avete già un candidato per F...
Fine Esercizio 2 (facoltativo).

[2] si legge *li*, con la *i* lunga

Ulteriori informazioni.

L'esercizio 1 può essere generalizzato come segue:

Teorema (forma canonica delle matrici ortogonali). Sia $A \in O(n)$. Allora esistono interi positivi k_1, k_2; angoli $\theta_j \in (0, 2\pi), \theta_j \neq \pi$, $j = 1, \dots, \ell$ ed una base ortonormale $\mathcal{F}$ di $(\mathbb{R}^n, \bullet)$ tali che la matrice associata ad L_A nella base $\mathcal{F}$ sia

$$\left|\begin{array}{ccccc} I_{k_1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -I_{k_2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & R_{\theta_1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & R_{\theta_\ell} \end{array}\right|$$

dove I_k è la matrice identità $k \times k$ e dove abbiamo utilizzato la notazione

$$R_\theta := \left|\begin{array}{cc} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{array}\right|$$

per la rotazione (in senso antiorario) di un angolo θ in $\mathbb{R}^2$.
Equivalentemente: esiste una matrice ortogonale $M \in O(n)$ tale che

$$M^{-1}AM = \left|\begin{array}{ccccc} I_{k_1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -I_{k_2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & R_{\theta_1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & R_{\theta_\ell} \end{array}\right|.$$