Geometria 1

Prof. Paolo Piazza

Compito in classe del 20/4/2020.

Esercizio 1.
1. Consideriamo E^2 e l'affinità $T_{A,\underline{c}}$, $T_{A,\underline{c}}(\underline{x}) := A\underline{x} + \underline{c}$, con

$$A = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \quad \text{e} \quad \underline{c} = \begin{vmatrix} 2 \\ 3 \end{vmatrix}$$

Determinare 3 sottogruppi propri di $\mathrm{Aff}_2(\mathbb{R})$, G_1, G_2, G_3 ed elementi $T_1 \in G_1, T_2 \in G_2, T_3 \in G_3$ tali che $T_{A,\underline{c}} = T_1 \circ T_2 \circ T_3$
2. Sappiamo che un'affinità trasforma triangoli in triangoli.
Vero o Falso (*argomentate in dettaglio le vostre risposte*):
(a). $T_{A,\underline{c}}$ trasforma triangoli rettangoli in triangoli rettangoli
(b). $T_{A,\underline{c}}$ trasforma triangoli isosceli in triangoli isosceli
(c). $T_{A,\underline{c}}$ trasforma circonferenze in circonferenze
(d). $T_{A,\underline{c}}$ è un'isometria

Soluzione.
1. Sia $G_1 = \{T_{\mathrm{Id},\underline{c}},\ \underline{c} \in \mathbb{R}^2\}$ il sottogruppo di $\mathrm{Aff}_2(\mathbb{R})$ costituito delle traslazioni. Sia $G_2 = \{T_{\alpha\,\mathrm{Id},\underline{0}},\ \alpha \in \mathbb{R}^*\}$ is sottogruppo delle ometetie. Sia $G_3 = \{T_{M,\underline{0}},\ M \in SO(2)\}$ il sottogruppo delle rotazioni. Allora $T_1 := T_{\mathrm{Id},\underline{c}}$ con $\underline{c} = (2,3)^T$, $T_2 := T_{\sqrt{2}\,\mathrm{Id},\underline{0}}$, $T_3 := T_{M,\underline{0}}$ con

$$M = \begin{vmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{vmatrix}$$

sono tali che $T_j \in G_j$ e $T_{A,\underline{c}} = T_1 \circ T_2 \circ T_3$.
2. (a) e (b) sono vere perché le tre trasformazioni T_1, T_2, T_3 preservano gli angoli [1]; inoltre T_1 e T_3 preservano anche le lunghezze mentre T_2 le scala di un fattore $\sqrt{2}$. In particolare, dalla prima proprietà segue (a) e dalla seconda proprietà segue (b).
(c) è vera e si ragiona come in (a) e (b); la nostra trasformazione manda una circonferenza di raggio r e centro (x_0, y_0) nella circonferenza con centro in (x_0+2, y_0+3) e raggio $\sqrt{2}r$.
(d) è falsa perché la matrice A che interviene nella nostra trasformazione non è un elemento di $O(2)$.

[1] ovvio per T_1 e T_3 mentre per T_2 osserviamo che

$$\frac{<\alpha\underline{v}, \alpha\underline{w}>}{\|\alpha\underline{v}\|\|\alpha\underline{w}\|} = \frac{<\underline{v}, \underline{w}>}{\|\underline{v}\|\|\underline{w}\|}$$