Geometria I. Prof. P. Piazza. a.a. 2019-20.

Compito in classe del 16 Marzo 2020

Esercizio 1. Consideriamo lo spazio vettoriale euclideo $(\mathbb{R}^4, \bullet)$, con $\bullet$ il prodotto scalare standard:

$$\underline{x} \bullet \underline{y} = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_{n-1} y_{n-1} + x_n y_n \,.$$

Sia $b(\, , \,)$ la forma bilineare simmetrica definita in coordinate da

$$b(\underline{u}, \underline{v}) = u_1 v_1 - u_2 v_2 + u_3 v_4 + u_4 v_3 \tag{1}$$

Abbiamo già incontrato questa forma bilineare nel Primo Compito a casa; utilizzando il concetto di vettore non-isotropo e di b-ortogonale ad un vettore non-isotropo avete già costruito una base $\mathcal{K}$ di $\mathbb{R}^4$ che è diagonalizzante per $b(\, , \,)$.

1.1. Definire a partire da $b(\, , \,)$ un endomorfismo simmetrico T in $(\mathbb{R}^4, \bullet)$. Trovare una base ortonormale di $(\mathbb{R}^4, \bullet)$ costituita da autovettori per T.

1.2. Determinare una base ortonormale di $(\mathbb{R}^4, \bullet)$ rispetto alla quale $b(\, , \,)$ si scriva in forma diagonale. In altre parole, determinare una base ortonormale $\mathcal{H}$ di $(\mathbb{R}^4, \bullet)$ tale che $A_b^{\mathcal{H}}$ sia diagonale.

1.3. Determinare una base $\mathcal{G}$ di $\mathbb{R}^4$ che diagonalizzi l'operatore T ma *non* diagonalizzi la forma $b(\, , \,)$.
Suggerimento. Sicuramente dovete fissare una base $\mathcal{G}$ di autovettori per T; come andranno scelti questi autovettori per essere tali da *non* diagonalizzare $b(\, , \,)$?

1.4. Determinare una base di $\mathbb{R}^4$ che diagonalizzi $b(\, , \,)$ ma *non* diagonalizzi T.

Esercizio 2. (Continuazione dell' esercizio 1.)

(i) Sono dati i 4 vettori linearmente indipendenti

$$\mathcal{W} = \{\underline{w}_1 = (1,0,0,0) \quad \underline{w}_2 = (1,1,0,0) \quad \underline{w}_3 = (0,0,1,0) \quad \underline{w}_4 = (0,0,0,1)\}.$$

Definiamo un *nuovo* prodotto scalare $<\, , \,>$ in $\mathbb{R}^4$ ponendo

$$< \underline{u}, \underline{v} > := b_{I_4}^{\mathcal{W}}(\underline{u}, \underline{v})$$

con I_4 la matrice identità.
Detto diversamente, dichiariamo la base $\mathcal{W}$ ortonormale ed estendiamo per bilinearità ottenendo in questo modo il prodotto scalare $<\, , \,>$.
Otteniamo un *nuovo* spazio vettoriale *euclideo* $(\mathbb{R}^4, <\, , \,>)$. Verificare che l'espressione di $<\, , \,>$ *nella base canonica* è:

$$< (x_1, x_2, x_3, x_4), (y_1, y_2, y_3, y_4) > = x_1 y_1 - x_1 y_2 - x_2 y_1 + 2 x_2 y_2 + x_3 y_3 + x_4 y_4$$

Osserviamo che questa espressione è diversa da quella del prodotto scalare canonico. Quindi, *come spazi euclidei*, $(\mathbb{R}^4, <\, , \,>)$ e $(\mathbb{R}^4, \bullet)$ sono *diversi.*

Premessa a **(ii)**: l'operatore di cui nell'Esercizio 1, punto **1.1.**, dipende dalla struttura di spazio euclideo definita dal prodotto scalare canonico $\bullet$. Se cambiamo prodotto scalare allora otteniamo (presumibilmente) un operatore diverso.
Fine Premessa

(ii) Calcolare la matrice associata nella base canonica all'operatore simmetrico T' definito dalla forma bilineare (1) e dal nuovo prodotto scalare $<,>$.
Confrontare T e T'.
Suggerimento. È facile calcolare $A_b^{\mathcal{W}}$ perché basta utilizzare la formula che collega le matrici associate ad una fissata forma bilineare in due basi diverse. A partire da $A_b^{\mathcal{W}}$ otteniamo $M_{\mathcal{W},\mathcal{W}}(T')$ (immediato dalla definizione) e una volta noto $M_{\mathcal{W},\mathcal{W}}(T')$ possiamo determinare $M_{\mathcal{E},\mathcal{E}}(T')$.
Verificate ora che T e T', pur essendo associati alla stessa forma bilineare, sono operatori *diversi*.