Geometria I. Prof. P. Piazza. a.a. 2019-20.

Compito in classe del 3 Marzo 2020

Esercizio 1. Sia $V = \mathbb{R}_n[X]$ lo spazio dei polinomi a coefficienti reali di grado $\leq n$. È uno spazio vettoriale reale di dimensione $n+1$. Sappiamo che

$$b(P,Q) := \int_{-1}^{1} P(t)Q(t)dt$$

definisce una forma bilineare simmetrica. Verificare che è definita positiva.

Esercizio 2. Sia $(V, <\,,\,>)$ uno spazio vettoriale euclideo e sia $\mathcal{F} = \{\underline{f}_1, \dots, \underline{f}_n\}$ una sua base *ortonormale*. Sia $\underline{v} \in V$. Verificare che

$$\underline{v} = <\underline{v}, \underline{f}_1> \underline{f}_1 + \cdots + <\underline{v}, \underline{f}_n> \underline{f}_n \,.$$

In parole: le coordinate di $\underline{v}$ rispetto alla base ortonormale $\mathcal{F}$ sono date dai prodotti scalari di $\underline{v}$ con gli elementi della base.

Esercizio 3. Sia $(V, <\,,\,>)$ uno spazio vettoriale euclideo e sia S un sottoinsieme di V (non necessariamente un sottospazio). Sappiamo dalla bilinearità di $<\,,\,>$ che

$$S^{\perp} := \{\underline{v} \in V \text{ tali che } <\underline{v}, \underline{s}>= 0 \;\forall \underline{s} \in S\}$$

è un sottospazio (riverificatelo).
Sia ora U un sottospazio vettoriale di V. Sia $\{\underline{u}_1, \dots, \underline{u}_r\}$ una qualsiasi base di U. Verificare che

$$U^{\perp} = \{\underline{v} \in V \text{ tali che } <\underline{v}, \underline{u}_j>= 0 \;\forall j = 1, \dots, r\}.$$

Esercizio 4. Sia $V = \mathbb{R}^4$ con prodotto scalare standard

$$\underline{x} \bullet \underline{y} := x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 + x_4y_4$$

Determinare una base ortonormale del sottospazio U di equazioni cartesiane

$$\begin{cases} x_1 + x_3 = 0 \\ x_2 + x_4 = 0 \end{cases}$$

Determinare equazioni cartesiane per $U^{\perp}$.

Esercizio 5.
Sia X un insieme e $G = \{f : X \to X \mid f \text{ è bigettiva}\}$. Sia $\circ$ la composizione fra applicazioni. Verificare che $(G, \circ)$ è un gruppo.
(Se $X = \{1, 2, \dots, n\}$ allora $(G, \circ)$ possiede una notazione specifica, che è $\mathcal{S}_n$, ed un nome specifico che è il *gruppo simmetrico di n oggetti*. Lo avete incontrato quando avete parlato della funzione determinante.)

Esercizio 6. Sia $(G, \bullet)$ un gruppo. Dimostrare che l'elemento neutro è unico. Dimostrare che l'inverso di $g \in G$ è unico. Dimostrare che l'intersezione di due sottogruppi è un sottogruppo (si veda Sernesi per la definizione di sottogruppo).

Esercizio 7. Consideriamo i seguenti sottoinsiemi di $GL(n, \mathbb{R})$:

$$SL(n, \mathbb{R}) = \{A \in GL(n, \mathbb{R}) \mid \det A = 1\}$$
$$O(n) = \{A \in GL(n, \mathbb{R}) \mid A^t A = I_n\}$$
$$SO(n) = \{A \in O(n) \mid \det A = 1\}.$$

Verificare che sono sottogruppi di $GL(n, \mathbb{R})$.
Consideriamo i sottoinsiemi di $GL(n, \mathbb{C})$:

$$U(n) = \{A \in GL(n, \mathbb{C}) \mid \overline{A}^t A = I_n\} \text{ e } SU(n) = \{A \in U(n) \mid \det A = 1\}$$

Verificare che sono sottogruppi di $GL(n, \mathbb{C})$.