Geometria I. Prof. P. Piazza. a.a. 2016-17.

Compito del 27 Aprile 2017 (nono compito)

Esercizi elementari di geometria affine.

Consideriamo uno spazio affine A di dimensione 3 con riferimento affine $O\underline{e}_1\underline{e}_2\underline{e}_3$ fissato e coordinate associate (x, y, z).

Esercizio 1. Sia r la retta di equazioni cartesiane:

$$(1) \qquad \begin{cases} Ax + By + Cz + D = 0 \\ A'x + B'y + C'z + D' = 0 \end{cases}, \quad \text{con } \operatorname{rg}\begin{vmatrix} A & B & C \\ A' & B' & C' \end{vmatrix} = 2\,.$$

(r è quindi espressa come intersezione di due piani non-paralleli π e π'.)
Spiegare perché l'equazione

$$(2) \qquad \lambda(Ax + By + Cz + D) + \mu(A'x + By' + C'z + D') = 0\,, \quad (\lambda, \mu) \neq (0, 0)$$

fornisce, al variare di $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ *la totalità dei piani per* r.
La totalità dei piani per r costituisce il *fascio di piani per* r.

Esercizio 2. Scrivere l'equazione cartesiana del piano per il punto $(0, 2, 0)$ e per la retta di equazione cartesiana

$$\begin{cases} x - z = 3 \\ y + 2z = 1 \end{cases}$$

(Utilizzare il fascio di piani per r (questo è il "metodo del fascio").)

Esercizio 3. Determinare le equazioni cartesiane della retta r passante per $(4, 1, 0)$ e complanare alle rette s e t di equazioni rispettivamente

$$\begin{cases} x + 2z - 1 = 0 \\ y - z - 3 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x - z - 2 = 0 \\ y + z = 0 \end{cases}$$

Suggerimento: la retta r cercata è intersezione di due piani. Una volta capito di quali piani r è intersezione, può essere utile il "metodo del fascio".....

Esercizi di geometria affine.

Esercizio 4. Consideriamo lo spazio affine numerico $A^4(\mathbb{R})$ con riferimento canonico affine fissato e sia S il sottospazio affine di equazioni cartesiane

$$X_1 + X_2 - X_3 = 2 \qquad X_2 + X_3 - X_4 = 1\,.$$

Sia U il sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$ uguale a $\operatorname{Span}((1, 0, -1, 0), (2, 0, 0, 2))$.
1. Spiegare perché è ben definito l'operatore di proiezione su S parallelamente a U, $P_{S,U}$.
2. Sia $\underline{t}$ un punto generico di $A^4(\mathbb{R})$. Determinare $A \in M_{4\times 4}(\mathbb{R})$ e $\underline{c} \in \mathbb{R}^4$ tali che

$$P_{S,U}(\underline{t}) = A\underline{t} + \underline{c}$$

Esercizio 5. Consideriamo lo spazio affine numerico $A^2(\mathbb{R})$ con riferimento canonico affine fissato. Decidere se esiste un'affinità $f : A^2(\mathbb{R}) \to A^2(\mathbb{R})$ tale che

$$f(1, 1) = (0, 0)\,, \quad f(-2, -2) = (1, -1)\,, \quad f(1, -2) = (1/4, 1/2)$$

ed in caso affermativo determinarla.

Esercizio 6. Consideriamo lo spazio affine numerico $A^2(\mathbb{R})$ con riferimento canonico affine fissato. Siano r, s, t e r', s', t' le rette di equazione

$$r : x = 1, \quad s : x = y, \quad t : y = -2$$
$$r' : 2x - y = 0, \quad s' : x = -y, \quad t' : 2x + y = 1$$

Decidere se esiste un'affinità $f : A^2(\mathbb{R}) \to A^2(\mathbb{R})$ tale che

$$f(r) = r', \quad f(s) = s', \quad f(t) = t'$$

ed in caso affermativo determinarla.

Esercizi elementari di geometria euclidea.

Consideriamo uno spazio euclideo E di dimensione 3 su uno spazio vettoriale euclideo $(V, <\,,\,>)$ con riferimento cartesiano $O\underline{e}_1\underline{e}_2\underline{e}_3$ fissato e coordinate associate (x, y, z).

Esercizio 7. Determinare equazioni cartesiane per il piano passante per $(-1, 0, 1)$ ed ortogonale alla retta di equazioni cartesiane

$$\begin{cases} x + z + 2 = 0 \\ x - y + 3 = 0 \end{cases}$$

Esercizio 8. Siano A, B, C, D i punti di coordinate

$$A = (1, 2, 2), \quad B = (2, 1, 2), \quad C = (2, 2, 1), \quad D = (1, 1, 1).$$

1. Si verifichi che A, B, C, D non sono complanari.
2. Scrivere un'equazione cartesiana del piano α contenente A, B, C.
3. Calcolare la distanza tra α e D.

Esercizio 9. Si consideri la retta s di equazioni cartesiane $x+2z-1 = 0 = y-z+2$. Determinare i punti di s che distano $\sqrt{3}$ dall'origine.

Esercizio 10. Consideriamo uno spazio euclideo E di dimensione 2 su uno spazio vettoriale euclideo $(V, <\,,\,>)$ con riferimento cartesiano $O\underline{e}_1\underline{e}_2$ fissato e coordinate associate (x_1, x_2). Sia O' il punto di coordinate $(-4, 1)$ e siano

$$\underline{f}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\,\underline{e}_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\,\underline{e}_2\,, \qquad \underline{f}_2 = -\frac{1}{\sqrt{2}}\,\underline{e}_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\,\underline{e}_2$$

vettori di V.
1. Verificare che $O'\underline{f}_1\,\underline{f}_2$ è un riferimento cartesiano di E. Siano (y_1, y_2) le coordinate associate a tale riferimento.
2. Determinare l'equazione cartesiana della retta r nel riferimento $O'\underline{f}_1\,\underline{f}_2$.