**Geometria I. Prof. P. Piazza. a.a. 2016-17.**

**Compito del 30 Marzo 2017 (ottavo compito)**

**Esercizio 0.** Leggere attentamente la sezione sui numeri complessi nel libro di Abate - de Fabritiis

**Esercizio 1.** Sia $(V, < , >)$ uno spazio vettoriale euclideo di dimensione $n$. Fissiamo una base $\mathcal{B}$ con coordinate associate $\underline{x}$. Sia $U$ un sottospazio di dimensione $n-1$ di equazioni cartesiane

$$a_1x_1 + \cdots + a_nx_n = 0$$

Dare un generatore per la retta $U^\perp$.

**Esercizio facoltativo.** Sia $V$ uno spazio vettoriale reale di dimensione $n$ e sia $b$ una forma bilineare *antisimmetrica*. Assumiamo che $b$ sia non-degenere. La coppia $(V, b( \, , \, ))$ costituisce, per definizione, uno spazio vettoriale *simplettico.*
Dimostrare che esiste una base

$$\mathcal{F} = \{\underline{f}_1, \ldots, \underline{f}_{2k}\}$$

di $V$ rispetto alla quale

$$A_b^{\mathcal{F}} = \begin{vmatrix} 0 & I_k \\ -I_k & 0 \end{vmatrix}$$

Notare che, in particolare, $V$ ha necessariamente dimensione pari.
*Suggerimenti.*
Cominciate con l'osservare che esistono due vettori $\underline{u}, \underline{w}$ tali che $b(\underline{u}, \underline{w}) = 1$ (e quindi $b(\underline{w}, \underline{u}) = -1$.) Ponete $\underline{f}_1 := \underline{u}$ e $\underline{f}_{n+1} := \underline{v}$.
Considerate ora $\{\underline{f}_1, \underline{f}_{n+1}\}^{\perp_b}$.....
Scrivete un generico vettore come

$$\underline{v} = (\underline{v} - b(\underline{f}_1, \underline{v})\underline{f}_{n+1} - b(\underline{f}_{n+1}, \underline{v})\underline{f}_1) + (b(\underline{f}_1, \underline{v})\underline{f}_{n+1} + b(\underline{f}_{n+1}, \underline{v})\underline{f}_1) \, .$$

**Esercizio 1.5.** Sia $\phi(\underline{x})$ la forma quadratica reale $\phi(\underline{x}) = 2x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_3^2 - 4x_1x_2 + 4x_1x_3 - 4x_2x_3$. Determinare la forma canonica di Sylvester di $\phi$ e una base di $\mathbb{R}^3$, con coordinate associate $\underline{z}$, che porti la forma quadratica nella sua forma canonica.

**Esercizio 2.**
**2.1.** Sia $(V, < , >)$ uno spazio vettoriale euclideo oppure uno spazio vettoriale hermitiano. Sia $T$ un endomorfismo. Fissiamo una qualsiasi base $\mathcal{B}$. Sia $A$ la matrice associata a $T$ in questa base, $A = M_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(T)$, e sia $S$ la matrice associata a $< , >$ in questa base. Sia infine $A^*$ la matrice dell'operatore aggiunto $T^*$ nella base $\mathcal{B}$. *Scrivere una formula che esprima $A^*$ in termini di $S$ ed $A$.*
(Le formule sono diverse a seconda che $(V, < , >)$ sia uno spazio vettoriale euclideo oppure uno spazio vettoriale hermitiano.)
**2.2** Sia $(V, < , >)$ uno spazio vettoriale euclideo. Completare le seguenti proposizioni e dimostrarle:
**Proposizione.** $T$ è un operatore ortogonale se e solo se per le matrici $A$ ed $S$ vale la relazione......
**Proposizione.** $T$ è un operatore simmetrico se e solo se per le matrici $A$ ed $S$ vale la relazione......
**2.3** Sia $(V, < , >)$ uno spazio vettoriale hermitiano. Completare le seguenti proposizioni e dimostrarle:

**Proposizione.** $T$ è un operatore unitario se e solo se per le matrici $A$ ed $S$ vale la relazione......
**Proposizione.** $T$ è un operatore hermitiano se e solo se per le matrici $A$ ed $S$ vale la relazione......

**Esercizio 2.5** Consideriamo $V = \mathbb{C}^2$ e sia
$$A = \begin{vmatrix} 1 & 1+i \\ 1-i & -1 \end{vmatrix}.$$
Consideriamo
$$h(\mathbf{x}, \mathbf{y}) := \mathbf{x}^T A \overline{\mathbf{y}}.$$
Stabilire se $h(\ ,\ )$ è una forma hermitiana. Stabilire se $h(\ ,\ )$ è prodotto hermitiano.

**Esercizio 3.** Sia $V = \mathbb{C}^2$ con prodotto hermitiano canonico. Sia $T : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ l'operatore $L_A$ con
$$A = \begin{vmatrix} 2 & 1+i \\ 1-i & 0 \end{vmatrix}$$
**3.1** Spiegare perché $T$ è diagonalizzabile con base diagonalizzante ortonormale.
**3.2** Determinare una base ortonormale di $\mathbb{C}^2$ costituita da autovettori di $T$.
**3.3** Stabilire se tale base è unica.
**3.4** Determinare una matrice unitaria $U$ ed una matrice diagonale $\Delta$ tali che $U^{-1}AU = \Delta$

**Esercizio 4.** Consideriamo l'endomorfismo $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definito, rispetto ad una base $\mathcal{B}$, dalla matrice
$$M = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}$$

- (4.1) Dire se può esistere un prodotto scalare di $\mathbb{R}^2$ in modo tale che $\mathcal{B}$ sia una base ortonormale rispetto a tale prodotto scalare e $T$ sia un operatore simmetrico.
- (4.2) Dire se può esistere un prodotto scalare di $\mathbb{R}^2$ in modo tale che $\mathcal{B}$ sia una base ortonormale rispetto a tale prodotto scalare e $T$ sia un operatore ortogonale.
- (4.3) Determinare, se esiste, un prodotto scalare di $\mathbb{R}^2$ rispetto al quale $T$ è simmetrico
- (4.4) Determinare, se esiste, un prodotto scalare di $\mathbb{R}^2$ rispetto al quale $T$ è ortogonale.

*Suggerimento*: per (4.3) e (4.4) scrivere la matrice $A = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ di un generico prodotto scalare su $\mathbb{R}^2$ ed utilizzare l'esercizio 2.