Geometria I. Prof. P. Piazza. a.a. 2016-17.

Compito del 23 Marzo 2017 (settimo compito)

Esercizio 1. Sia $(V, <\,,\,>)$ uno spazio vettoriale euclideo. Sia T un endomorfismo. Fissiamo una base $\mathcal{B}$. Sia A la matrice associata a T in questa base, $A = M_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(T)$, e sia S la matrice associata a $<\,,\,>$ in questa base. Completare la seguente Proposizione e dimostrarla:
Proposizione. T è un operatore simmetrico se e solo se per le matrici A ed S vale la relazione......

Esercizio 2. Sia $V = \mathbb{R}^2$ e sia $S = \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}$
2.1 Verificare che l'applicazione $<\,,\,>: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definita da $<\underline{x}, \underline{y}> = \underline{x}^T S \underline{y}$ è un prodotto scalare.
2.2 Sia $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ l'operatore L_A con $A = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}$. Stabilire se T è simmetrico rispetto al prodotto scalare definito in **2.1**.

Esercizio 3. Dimostrare il seguente risultato
Decomposizione spettrale: Sia T un endomorfismo simmetrico di uno spazio vettoriale euclideo $(V, <\,,\,>)$. Siano $V_T(\lambda_1), \dots, V_T(\lambda_k)$ gli autospazi distinti di T e sia $P_{V_T(\lambda_i)}$ l'operatore di proiezione ortogonale su $V_T(\lambda_i)$. Verificare che vale la seguente identità in End(V):

$$T = \lambda_1 P_{V_T(\lambda_1)} + \cdots + \lambda_k P_{V_T(\lambda_k)}.$$

Suggerimento: fissate un'opportuna base dello spazio e verificate che i due membri di questa uguaglianza operano allo stesso modo su questa base.

Esercizio 4. Verificate che una simmetria ortogonale rispetto ad un sottospazio è un operatore ortogonale in $(V, <\,,\,>)$.

Continuiamo la nostra discussione su proiezioni e simmetrie. È bene avere sotto mano il testo del compito 6.

Esercizio 5. Sia V uno spazio vettoriale euclideo con prodotto scalare $<\,,\,>$. Verificare che se P è una proiezione *ortogonale* su un sottospazio W, $P \equiv P_W$, allora P è simmetrico.
Suggerimento: utilizzate per ogni $\underline{v} \in V$ la decomposizione ortogonale $V = W \oplus W^\perp$; quindi $\underline{v} = \underline{v}_W + \underline{v}_{W^\perp}$.

Esercizio 6. Verificare che se T è idempotente *e* simmetrico, allora T è una proiezione ortogonale (e più precisamente la proiezione ortogonale su $V_T(1)$).
Suggerimento: come sono gli autovettori associati ad autovalori distinti per un operatore simmetrico ?

In conclusione, avete dimostrato la seguente
Proposizione. Se $T^2 = T$ e T è simmetrico allora T è la proiezione ortogonale su $V_T(1)$.

Passiamo alle simmetrie. Un operatore $T \in \mathrm{End}(V)$ è una *involuzione* se $T^2 = \mathrm{Id}$. Sappiamo dal sesto compito che le simmetrie sono involuzioni.

Esercizio 7. Sia T è un'involuzione. Sia λ un autovalore. Allora $\lambda = \pm 1$.
Suggerimento: se $T\underline{v} = \lambda \underline{v}$ allora da una parte $\underline{v} = T^2\underline{v}$ (per ipotesi) e d'altra parte $T^2\underline{v} = \lambda T\underline{v} = \lambda^2\underline{v}$. Continuate voi.

Esercizio 8. Sia T è un'involuzione. Allora $V = V_T(1) \oplus V_T(-1)$.
Suggerimento: osservate che $\underline{v} = \frac{v+Tv}{2} + \frac{v-Tv}{2}$.
Concludete dagli esercizi 6 e 7 che un'involuzione è una simmetria.

Esercizio 9. Sia ora $(V, < , >)$ uno spazio vettoriale euclideo. Verificare che la simmetria ortogonale S_W rispetto ad un sottospazio W gode delle seguenti 2 proprietà:
(i) $S_W^2 = I$ (già verificato per ogni simmetria)
(ii) S_W è un operatore simmetrico.

Esercizio 10. Sia $(V, < , >)$ uno spazio vettoriale euclideo. Sia T un'involuzione. Supponiamo, che T sia *anche* simmetrico. Verificare che sotto questa ulteriore ipotesi la decomposizione di cui nell'esercizio 8 è di fatto una decomposizione ortogonale: $V = V_T(1) \oplus^{\perp} V_T(-1)$.

Concludete che vale la seguente
Proposizione. Se $T^2 = \mathrm{Id}$ e T è simmetrico allora T è la simmetria ortogonale rispetto a $V_T(1)$.