Geometria I. Prof. P. Piazza. a.a. 2016-17.

Compito del 20 Marzo 2017 (sesto compito)

Sia V uno spazio vettoriale reale e sia $V = W_1 \oplus W_2$ una sua decomposizione in somma diretta. Possiamo allora definire quattro operatori:
$P_{W_1}^{W_2}$ la proiezione su W_1 parallelamente a W_2;
$P_{W_2}^{W_1}$, la proiezione su W_2 parallelamente a W_1;
$S_{W_1}^{W_2}$, la simmetria rispetto a W_1 parallelamente a W_2;
$S_{W_2}^{W_1}$, la simmetria rispetto a W_2 parallelamente a W_1.
Per semplificare la notazione poniamo

$$P_1 := P_{W_1}^{W_2}\,, \quad P_2 := P_{W_2}^{W_1}\,, \quad S_1 := S_{W_1}^{W_2}\,, \quad S_2 := S_{W_2}^{W_1}$$

Questi operatori sono definiti come segue: ogni vettore $\underline{w}$ di V si scrive in **maniera unica** come $\underline{w} = \underline{w}_1 + \underline{w}_2$ con $\underline{w}_1 \in W_1$ e $\underline{w}_2 \in W_2$. Definiamo $P_1 : V \to V$ associando a $\underline{w} \in V$ il vettore $\underline{w}_1 \in V$: quindi $P_1(\underline{w}) = \underline{w}_1$ per definizione. Analogamente: $P_2(\underline{w}) = \underline{w}_2$ per definizione. Infine

$$S_1(\underline{w}) := \underline{w}_1 - \underline{w}_2, \quad S_2(\underline{w}) := \underline{w}_2 - \underline{w}_1.$$

Se V è uno spazio vettoriale euclideo con prodotto scalare $<\,,\,>$ e $W_2 = (W_1)^\perp$ allora $P_1 = P_{W_1}$ è, per definizione, *la proiezione ortogonale su* W_1; $P_2 = P_{(W_1)^\perp}$ è per definizione *la proiezione ortogonale su* $(W_1)^\perp$. Analogamente S_1 è per definizione la simmetria ortogonale rispetto a W_1 e S_2 è per definizione la simmetria ortogonale rispetto a $(W_1)^\perp$

Esercizio 1. Verificare che queste applicazioni sono *lineari*.
Considerate $V = \mathbb{R}^2$, W_1 e W_2 di dimensione 1 (che sceglierete *non* ortogonali); fissate un vettore $\underline{w}$ che non appartenga a W_1 e W_2. Su un disegno indicate W_1, W_2, $\underline{w}$, $P_1(\underline{w})$, $P_2(\underline{w})$, $S_1(\underline{w})$, $S_2(\underline{w})$.

Esercizio 2. Verificare che sussistono le seguenti identità:

$$(P_1)^2 = P_1\,; \quad (P_2)^2 = P_2\,; \quad P_1 + P_2 = \mathrm{Id} \tag{1}$$

$$S_1 = \mathrm{Id} - 2P_2\,; \quad S_2 = 2P_2 - \mathrm{Id} \tag{2}$$

$$(S_1)^2 = \mathrm{Id}\,; \quad (S_2)^2 = \mathrm{Id} \tag{3}$$

In queste formule Id è l'applicazione identica, che manda $\underline{v}$ in $\underline{v}$.
Vi ricordo che se $T, S \in \mathrm{End}(V)$ allora $T = S$ sse $T(\underline{v}) = S(\underline{v})$ $\forall \underline{v} \in V$. Ritrovate sul vostro disegno le identità dimostrate analiticamente.

Esercizio 3.

3.1 Se V è uno spazio vettoriale euclideo con prodotto scalare $<\,,\,>$ allora abbiamo visto una formula esplicita per la proiezione ortogonale su un sottospazio. Scrivete questa formula. Suggerimento: andate a vedere la dimostrazione che $V = W \oplus W^\perp$.

3.2 Sia $V = \mathbb{R}^3$ con prodotto scalare canonico. Determinare la matrice associata nella base canonica $\mathcal{E}$ all'operatore di proiezione ortogonale P_W sul piano W di equazioni cartesiane $x_1 + x_2 - x_3 = 0$. Abbiamo denotato con $M_{\mathcal{E},\mathcal{E}}(P_W)$ questa

matrice.
Determinare anche $M_{\mathcal{E},\mathcal{E}}(S_W)$.
3.3 Sia $V = \mathbb{R}^3$. Scrivere la matrice associata nella base canonica di $\mathbb{R}^3$ alla proiezione sul piano W di equazione $-x_1 + x_2 + x_3 = 0$ parallelamente alla retta generata dal vettore $(1, 2, 1)$ (abbiamo denotato con $\mathbb{R}(1, 2, 1)$ questa retta).
Suggerimento: c'è una base $\{\underline{g}_1, \underline{g}_2, \underline{g}_3\}$ di $\mathbb{R}^3$ per cui la matrice associata alla proiezione è estremamente facile a scriversi. Qual è questa base ?[1]

Esercizio 4. Verificare che P_1 e P_2 di cui negli esercizi 1 e 2 sono diagonalizzabili con autovalori 1 e 0 e che $V_{P_1}(0) = W_2$, $V_{P_1}(1) = W_1$; $V_{P_2}(0) = W_1$, $V_{P_2}(1) = W_2$.
Verificare che S_1 e S_2 di cui negli esercizi 1 e 2 sono diagonalizzabili con autovalori 1 e -1 e che $V_{S_1}(1) = W_1$, $V_{S_1}(-1) = W_2$; $V_{S_2}(1) = W_2$, $V_{S_2}(-1) = W_1$.

Abbiamo verificato nell' Esercizio 2 che $P_j^2 = P_j$. Se $T : V \to V$ è un endomorfismo tale che $T^2 = T$ allora si dice che T è *idempotente*. Quindi le proiezioni sono operatori idempotenti. Dimostretrete nei prossimi 2 esercizi il viceversa.

Esercizio 5. Sia $T \in \mathrm{End}(V)$ un operatore idempotente (quindi $T^2 = T$). Sia $\lambda \in \mathbb{R}$ un autovalore di T; verificare che $\lambda = 0$ oppure $\lambda = 1$.

Esercizio 6. Verificare che se T è idempotente allora $V = V_T(1) \oplus V_T(0)$. Concludete che vale la seguente affermazione: se T è idempotente allora T è una proiezione su un sottospazio (quale ?) parallelamente ad un sottospazio complementare (quale ?)
Suggerimento. Possiamo scrivere, per ogni $\underline{v} \in \mathbb{R}^n$, $\underline{v} = T\underline{v} + (I - T)\underline{v}$...

Esercizio 7. Riconoscere che la matrice $\begin{vmatrix} 1/2 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 & 1/2 \end{vmatrix}$ è associata nella base canonica di $\mathbb{R}^4$ ad un operatore di proiezione ortogonale su un sottospazio W.

[1] Per rispondere a questa domanda interrogatevi su come agisce la proiezione sui vettori del piano W e sui vettori della retta $\mathbb{R}(1, 2, 1)$.