Geometria I. Prof. P. Piazza. a.a. 2016-17.

Compito del 16 Marzo 2017 (quinto compito)

Esercizio 1. Consideriamo lo spazio vettoriale euclideo $(\mathbb{R}^4, \bullet)$, con $\bullet$ il prodotto scalare standard:

$$\underline{x} \bullet \underline{y} = x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_{n-1}y_{n-1} + x_ny_n\,.$$

Sia $b(\,,\,)$ la forma bilineare simmetrica definita in coordinate da

$$b(\underline{u}, \underline{v}) = u_1v_1 - u_2v_2 + u_3v_4 + u_4v_3$$

Abbiamo incontrato questa forma bilineare nel Secondo Compito a casa. Utilizzando il concetto di vettore non-isotropo e di b-ortogonale ad un vettore non-isotropo abbiamo già costruito una base $\mathcal{K}$ di $\mathbb{R}^4$ che diagonalizzi $b(\,,\,)$.

1.1. Definire a partire da $b(\,,\,)$ un endomorfismo simmetrico T in $(\mathbb{R}^4, \bullet)$. Trovare una base ortonormale di $(\mathbb{R}^4, \bullet)$ costituita da autovettori per T.

1.2. Determinare una base ortonormale di $(\mathbb{R}^4, \bullet)$ rispetto alla quale $b(\,,\,)$ si scriva in forma diagonale. In altre parole, determinare una base ortonormale $\mathcal{H}$ di $(\mathbb{R}^4, \bullet)$ tale che $A_b^{\mathcal{H}}$ sia diagonale.

1.3. Determinare una base $\mathcal{G}$ di $\mathbb{R}^4$ che diagonalizzi l'operatore T ma *non* diagonalizzi la forma $b(\,,\,)$.
Suggerimento. Sicuramente dovete fissare una base $\mathcal{G}$ di autovettori per T; come andranno scelti questi autovettori per essere tali da *non* diagonalizzare $b(\,,\,)$?

1.4. Determinare una base di $\mathbb{R}^4$ che diagonalizzi $b(\,,\,)$ ma *non* diagonalizzi T.

Esercizio 2. Consideriamo lo spazio vettoriale euclideo $(\mathbb{R}^4, \bullet)$. con $\bullet$ il prodotto scalare standard. Si consideri la forma quadratica su $\mathbb{R}^4$ definita da

$$q(x_1, x_2, x_3, x_4) = 2x_1x_3 + 2x_2x_3.$$

Determinare una base **ortonormale** di $(\mathbb{R}^4, \bullet)$ che diagonalizzi questa forma quadratica. Scrivere l'espressione della forma quadratica nelle nuove coordinate. Determinare infine la forma di Sylvester della forma quadratica (detta anche *forma canonica affine*).

Esercizio 3. Determinare la forma di Sylvester (o, equivalentemente, la forma canonica affine) della forma quadratica definita su $M_{2,2}(\mathbb{R})$ dalla formula

$$q(A) := \mathrm{Tr}(A^2).$$

dove identifichiamo $M_{2,2}(\mathbb{R})$ con $\mathbb{R}^4$.

Esercizio 4 (Facoltativo). Riprendiamo l'esercizio 1.

(i) Sono dati i 4 vettori linearmente indipendenti

$$\mathcal{W} = \{\underline{w}_1 = (1,0,0,0) \quad \underline{w}_2 = (1,1,0,0) \quad \underline{w}_3 = (0,0,1,0) \quad \underline{w}_4 = (0,0,0,1)\}.$$

Definiamo un *nuovo* prodotto scalare $<\,,\,>$ in $\mathbb{R}^4$ ponendo

$$<\underline{u}, \underline{v}> := b_{I_4}^{\mathcal{W}}(\underline{u}, \underline{v})$$

con I_4 la matrice identità.
Otteniamo un *nuovo* spazio vettoriale *euclideo* $(\mathbb{R}^4, <\,,\,>)$. Verificare che l'espressione di $<\,,\,>$ *nella base canonica* è:

$$< (x_1, x_2, x_3, x_4), (y_1, y_2, y_3, y_4) >= x_1y_1 - x_1y_2 - x_2y_1 + 2x_2y_2 + x_3y_3 + x_4y_4$$

Osserviamo che questa espressione è diversa da quella del prodotto scalare canonico. Detto diversamente: *come spazi euclidei* $(\mathbb{R}^4, <\,,\,>)$ e $(\mathbb{R}^4, \bullet)$ sono *diversi*.

Premessa a **(ii)**: l'operatore di cui nell'Esercizio 1, punto **1.1.**, dipende dalla struttura di spazio euclideo definita dal prodotto scalare canonico $\bullet$. Se cambiamo prodotto scalare allora otteniamo (presumibilmente) un operatore diverso.
Fine Premessa

(ii) Calcolare la matrice associata nella base canonica all'operatore simmetrico T' definito dalla forma bilineare (1) e dal nuovo prodotto scalare $<\,,\,>$.
Suggerimento. È facile calcolare $A_b^{\mathcal{W}}$ perché basta utilizzare la formula che collega le matrici associate ad una fissata forma bilineare in due basi diverse. A partire da $A_b^{\mathcal{W}}$ otteniamo $M_{\mathcal{W},\mathcal{W}}(T')$ (immediato dalla definizione) e una volta noto $M_{\mathcal{W},\mathcal{W}}(T')$ possiamo determinare $M_{\mathcal{E},\mathcal{E}}(T')$.
Verificate ora che T e T', pur essendo associati alla stessa forma bilineare, sono operatori *diversi*.