Geometria I. Prof. P. Piazza. a.a. 2016-17.

Compito del 14 Marzo 2017 (quarto compito)

Esercizio 1. Sia $(G, \bullet)$ un gruppo. Dimostrare che l'elemento neutro è unico. Dimostrare che l'inverso di $g \in G$ è unico.

Esercizio 2.
Sia X un insieme e $G = \{f : X \to X \mid f \text{ è bigettiva}\}$. Sia $\circ$ la composizione fra applicazioni. Verificare che $(G, \circ)$ è un gruppo.

Esercizio 3. Verificare che $SL(n, \mathbb{R})$, $O(n)$ e $SO(n)$ sono sottogruppi di $GL(n, \mathbb{R})$.

Esercizio 4. Sia $(V, <\,,\,>)$ uno spazio vettoriale euclideo e sia $\mathcal{F} = \{\underline{f}_1, \dots, \underline{f}_n\}$ una sua base *ortonormale*. Sia $\underline{v} \in V$. Verificare che

$$\underline{v} = <\underline{v}, \underline{f}_1> \underline{f}_1 + \cdots + <\underline{v}, \underline{f}_n> \underline{f}_n\,.$$

In parole: le coordinate di $\underline{v}$ rispetto alla base ortonormale $\mathcal{F}$ sono date dai prodotti scalari di $\underline{v}$ con gli elementi della base.

Esercizio 5. Sia $(V, <\,,\,>)$ uno spazio vettoriale euclideo e sia S un sottoinsieme di V (non necessariamente un sottospazio). Sappiamo dalla bilinearità di $<\,,\,>$ che

$$S^{\perp} := \{\underline{v} \in V \text{ tali che } <\underline{v}, \underline{s}> = 0 \;\; \forall \underline{s} \in S\}$$

è un sottospazio (riverificatelo).
Sia ora U un sottospazio vettoriale di V. Sia $\{\underline{u}_1, \dots, \underline{u}_r\}$ una qualsiasi base di U. Verificare che

$$U^{\perp} = \{\underline{v} \in V \text{ tali che } <\underline{v}, \underline{u}_j> = 0 \;\; \forall j = 1, \dots, r\}.$$

Esercizio 6. Sia $V = \mathbb{R}^4$ con prodotto scalare canonico

$$<\underline{x}, \underline{y}> := x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3 + x_4 y_4$$

Determinare una base ortonormale del sottospazio U di equazioni cartesiane

$$\begin{cases} x_1 + x_3 = 0 \\ x_2 + x_4 = 0 \end{cases}$$

Determinare poi equazioni cartesiane per $U^{\perp}$ (potete utilizzare l'esercizio 5).

Esercizio 7. Sia $V = \mathbb{R}_2[X]$ e consideriamo $<\,,\,>: V \times V \to \mathbb{R}$ definita da

$$<p, q> = p(0)q(0) + p(1)q(1) + p(-1)q(-1).$$

7.1. Verificare che trattasi di un prodotto scalare.
7.2. Consideriamo i tre vettori $p_0 = -1 + X^2$, $p_1 = -1 + X$, $p_2 = X^2$. Verificare che $\{p_0, p_1, p_2\}$ è una base di V.
7.3. Applicare il procedimento di Gram-Schmidt alla base $\{p_0, p_1, p_2\}$ determinando una base ortonormale $\{q_0, q_1, q_2\}$.