Geometria I. Prof. P. Piazza. a.a. 2016-17.

Compito del 9 Marzo 2017 (terzo compito)

Esercizio 1. Sia V di dimensione n. Utilizzando le vostre conoscenze sui sistemi lineari omogenei e l'espressione in coordinate di una forma bilineare $b : V \times V \to \mathbb{K}$ date una dimostrazione della seguente proposizione:
$rg(b) = n$ se e solo se $\forall \underline{v} \neq \underline{0}$ $\exists \underline{w}$ tale che $b(\underline{v}, \underline{w}) \neq 0$.

Definizione. Sia V uno spazio vettoriale reale. Una forma bilineare simmetrica b è *definita positiva* se $b(\underline{v}, \underline{v}) > 0$ per ogni $\underline{v} \neq \underline{0}$. Una matrice simmetrica $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ è definita positiva se la forma bilineare simmetrica $b_A : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ data da $b_A(\underline{x}, \underline{y}) = \underline{x}^T A \underline{y}$ è definita positiva.

Esercizio 2. Spiegare perché una forma bilineare simmetrica definita positiva ha matrice di Sylvester uguale alla matrice identità.

Esercizio 3. Vero o falso: se $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ è una matrice simmetrica definita positiva allora esiste C invertibile tale che $A = C^T C$.

Esercizio 4. Sia $V = \mathbb{R}_2[X]$ lo spazio dei polinomi a coefficienti reali di grado ≤ 2. Fissiamo la base $\mathcal{E} = \{1, X, X^2\}$.

4.1 Verificare che l'applicazione $b : V \times V \to \mathbb{R}$ definita da

$$b(P, Q) := \int_{-1}^{1} P(t)Q(t)dt$$

definisce una forma bilineare simmetrica definita positiva.

4.2 Determinare la matrice associata a b nella base $\mathcal{E}$: $A_b^{\mathcal{E}}$.

4.3 Determinare una base diagonalizzante per b che abbia il primo vettore uguale al polinomio $1 + X$.