Geometria I. Prof. P. Piazza. a.a. 2016-17.

Compito del 7 Marzo 2017 (secondo compito)

Esercizio 1. Spazio vettoriale $\mathbb{R}^4$ con base standard (o canonica) $\mathcal{E} = \{\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3, \underline{e}_4\}$ fissata. Coordinate associate (x_1, x_2, x_3, x_4).
Sia $b(\ ,\ )$ la forma bilineare definita in coordinate da

$$b(\underline{u}, \underline{v}) = u_1 v_1 - u_2 v_2 + u_3 v_4 + u_4 v_3$$

1. Verificare che b è simmetrica.

2. Scrivere la matrice associata a b nella base $\mathcal{E}$, $A_b^{\mathcal{E}}$.

2. Verificare che b ha rango 4.

4. Utilizzando il concetto di vettore non-isotropo e di b-ortogonale ad un vettore non-isotropo, costruite una base $\mathcal{K}$ di $\mathbb{R}^4$ che diagonalizzi $b(\ ,\ )$.
(Suggerimento: cominciate con il fissare un vettore non-isotropo $\underline{k}_1$; determinate poi

$$\underline{k}_1^{\perp_b} \equiv (\mathbb{R}\underline{k}_1)^{\perp_b} := \{\underline{v} \in \mathbb{R}^4 \ \mid \ b(\underline{v}, \underline{k}_1) = 0\}$$

Come dovete scegliere $\underline{k}_2$? .....)

5. Determinare indice di positività e negatività di b ed una base $\mathcal{F}$ tale che $A_b^{\mathcal{F}}$ sia nella forma di Sylvester.

Esercizio di ripasso di Algebra Lineare (1). Sia $V = \mathbb{R}^3$. Consideriamo la base canonica $\mathcal{E} = \{\underline{e}_1 := (1,0,0), \underline{e}_2 := (0,1,0), \underline{e}_3 := (0,0,1)\}$ in $\mathbb{R}^3$.
Dopo aver spiegato perché la corrispondenza

$$F(1,1,0) = (1,2,-1)\,, \quad F(0,1,1) = (-1,1,1)\,, \quad F(0,0,1) = (-1,0,1)$$

definisce in maniera univoca un'applicazione lineare $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, determinare la matrice $M_{\mathcal{E},\mathcal{E}}(F)$.

Esercizio di ripasso di Algebra Lineare (2). Sia V lo spazio vettoriale $\mathbb{R}^3$ con base canonica $\{\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3\}$ fissata. Sia P l'applicazione lineare $P : V \longrightarrow V$ definita univocamente da

$$P\underline{e}_1 = 2\underline{g}_1 - 2\underline{g}_3\,, \qquad P\underline{e}_2 = \underline{g}_2 + \underline{g}_3\,, \qquad P\underline{e}_3 = \underline{g}_1 + \underline{g}_2 + \underline{g}_3\,, \tag{1}$$

con $\{\underline{g}_1 = (2,0,1)\,, \underline{g}_2 = (1,3,0)\,, \underline{g}_3 = (0,1,2)\}$. È subito visto che questi 3 vettori costituiscono una base $\mathcal{G}$ di $\mathbb{R}^3$. Determinare $M_{\mathcal{G},\mathcal{G}}(P)$.