Geometria I. Proff. P. Piazza e P. Piccinni a.a. 2017-18.

Tutoraggio del 16 Maggio 2018

Esercizio 1. Spazio proiettivo reale $P^3_{\mathbf{R}}$ - Coordinate omogenee $[x_0, x_1, x_2, x_3]$. Si considerino le rette

$$r_1 : \begin{cases} x_0 + x_1 = 0 \\ x_2 + x_3 = 0 \end{cases}, \qquad r_2 : \begin{cases} x_0 + x_2 = 0 \\ x_1 + x_3 = 0 \end{cases}, \qquad r_3 : \begin{cases} x_0 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 = 0 \end{cases}.$$

i) Verificare che r_1, r_2, r_3 sono a due a due incidenti, e determinare le coordinate omogenee dei punti $A = r_1 \cap r_2$, $B = r_1 \cap r_3$, $C = r_2 \cap r_3$.

ii) Scrivere l'equazione cartesiana del piano π contenente A, B, C.

iii) Siano α, β, γ i piani di $P^3_{\mathbf{R}}$ che hanno per coefficienti della loro equazione cartesiana le coordinate proiettive omogenne rispettivamente di A, B, C. Determinare le coordinate del punto $P = \alpha \cap \beta \cap \gamma$.

iv) Interpretare in termini della dualità in $P^3_{\mathbf{R}}$ la coincidenza tra le coordinate omogenee di P e i coefficienti dell'equazione cartesiana di π.

Esercizio 2. Spazio proiettivo reale $P^3_{\mathbf{R}}$ - Coordinate omogenee $[x_0, x_1, x_2, x_3]$. Siano π il piano di equazione: $x_0 + x_1 - x_2 + 2x_3 = 0$, r la retta di equazioni cartesiane

$$2x_0 - x_1 - x_2 + x_3 = 0 = x_0 + 2x_1 - x_2 - x_3$$

e s la retta di equazioni parametriche $x_0 = t + u,\ x_1 = 2t - u,\ x_2 = -t,\ x_3 = u.$

1. Verificare che le due rette sono sghembe e che il piano π non contiene nessuna delle due rette.

2. Fra le seguenti coppie di sottospazi: r e s, π e r, π e s, quali sono in posizione generale ?

3. Trovare equazioni parametriche della retta r' che interseca sia r che s ed è contenuta in π.

L'esercizio assegnato qui sopra è un caso particolare del seguente enunciato:
Siano r e s due rette sghembe e π un piano che non contiene nessuna delle due rette; allora esiste un' unica retta r' che interseca sia r che s ed è contenuta in π.

4. Determinare il duale del precedente enunciato.