Geometria I. a.a. 2017-18.
Proff. Paolo Piazza e Paolo Piccinni

Esercitazione scritta del 12.4.2018.

Esercizio 1. Determinare l'equazione del piano affine di $\mathbb{R}^3$ per $Q_0 = (1, 2, -1)$ e parallelo alle rette r ed s di equazioni rispettivamente

$$r : \begin{cases} x + y - z = 0 \\ x + 3z = 1 \end{cases} , \qquad s : \begin{cases} x = -1 + t \\ y = t \\ z = 3 + 4t \end{cases}$$

Esercizio 2. È data la retta affine r di $\mathbb{R}^3$ di equazione parametriche

$$\begin{cases} x = 2t + 1 \\ y = -t - 2 \\ z = t + 3 \end{cases}$$

Determinare i parametri direttori di r e scrivere equazioni cartesiane per r.
Stabilire se r è parallela al piano di equazione cartesiana $y + z = 0$.

Esercizio 3. Determinare le equazioni cartesiane della retta affine r di $\mathbb{R}^3$ passante per $(4, 1, 0)$ e complanare alle rette s e t di equazioni rispettivamente

$$s : \begin{cases} x + 2z - 1 = 0 \\ y - z - 3 = 0 \end{cases} \qquad t : \begin{cases} x - z - 2 = 0 \\ y + z = 0 \end{cases}$$

Suggerimento: la retta r cercata è intersezione di due piani. Una volta capito di quali piani r è intersezione, può essere utile il "metodo del fascio".....

Esercizio 4. Si considerino in $\mathbb{R}^3$ i vettori

$$\vec{v}_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}} \right), \quad \vec{v}_2 = \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}} \right).$$

i) Verificare che $\vec{v}_1, \vec{v}_2$ sono ortonormali e determinare il loro prodotto vettoriale $\vec{v}_3 = \vec{v}_1 \wedge \vec{v}_2$.

ii) Si consideri l'endomorfismo $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ definito dalle condizioni $T(\vec{v}_1) = \vec{v}_2,\ T(\vec{v}_2) = \vec{v}_3,\ T(\vec{v}_3) = \vec{v}_1$.. Determinare il nucleo di T. Scrivere la matrice M che rappresenta T nella base $(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3)$.

iii) Scrivere la matrice N che rappresenta T nella base canonica $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ di $\mathbb{R}^3$.

iv) Determinare gli autovalori reali di T, e (usando le coordinate canoniche di $\mathbb{R}^3$) le equazioni cartesiane degli autospazi di T.

v) Verificare che esiste un piano W invariante per T, $T(W) \subset W$, e scriverne l'equazione cartesiana.
Spiegare perché T induce su W un operatore, $T_W : W \to W$, che è ortogonale e che ha determinante uguale ad 1.
Ne segue che T_W è una rotazione di un angolo ϑ: determinare il valore di ϑ.
Suggerimento: la traccia è un invariante per similitudine; ciò permette di determinare il coseno di ϑ.