Geometria I. Proff. P. Piazza e P. Piccinni a.a. 2017-18.

Esercitazione pomeridiana del 28 Marzo 2018

Esercizio 1. Si consideri l'applicazione

$$h : \mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}$$

definita sui vettori $\vec{z} = (z_1, z_2), \vec{w} = (w_1, w_2) \in \mathbb{C}^2$ da

$$h(\vec{z}, \vec{w}) = z_1\bar{w}_1 + (1+i)z_1\bar{w}_2 + (1-i)z_2\bar{w}_1 - z_2\bar{w}_2.$$

i) Stabilire se h è una forma hermitiana in $\mathbb{C}^2$.

ii) Stabilire se h è un prodotto scalare hermitiano in $\mathbb{C}^2$.

iii) Dati i vettori $\vec{v}_1 = (1, -2i), \vec{v}_2 = (2, i)$, calcolare $h(v_1, v_1), h(v_1, v_2), h(v_2, v_2)$.

iv) Scrivere le matrici $A, A' \in M_2(\mathbb{C})$ associate a h nella base canonica di $\mathbb{C}^2$ e nella base $(\vec{v}_1, \vec{v}_2)$.

Esercizio 2. Si consideri la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & i & i \\ -i & 0 & i \\ -i & -i & 0 \end{pmatrix}.$$

i) Stabilire se A è hermitiana.

ii) Determinare gli autovalori di A e una base ortonormale di $\mathbb{C}^3$ costituita da autovettori di A.

iii) Detta B la matrice che ha per colonne gli autovettori di A, verificare che B è unitaria.

iv) Posto $C = iA = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, stabilire se C è diagonalizzabile su $\mathbb{C}$.

Esercizio 3. Si consideri il sistema lineare (a coefficienti reali)

$$(1) \qquad \begin{cases} x_1 & +x_2 & -2x_3 & = -1 \\ 2x_1 & -x_2 & -x_3 & = -2 \\ x_1 & -5x_2 & +4x_3 & = -1 \end{cases}$$

e il sistema lineare omogeneo associato

$$(2) \qquad \begin{cases} x_1 & +x_2 & -2x_3 & = 0 \\ 2x_1 & -x_2 & -x_3 & = 0 \\ x_1 & -5x_2 & +4x_3 & = 0 \end{cases}$$

i) Verificare che $P_0 = (-1, 0, 0)$ è una soluzione del sistema (1).

ii) Determinare l'insieme $W \subset \mathbb{R}^3$ delle soluzioni del sistema (2) e verificare che W è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$. Qual è la dimensione di W?

iii) Utilizzando quanto visto nei punti i) e ii), determinare l'insieme $S \subset \mathbb{R}^3$ delle soluzioni del sistema (1) e verificare che S è un sottospazio affine di $\mathbb{R}^3$. Qual è la dimensione di S? E la sua giacitura?