Geometria I. Prof. P. Piazza. a.a. 2017-18.

Compito a casa del 23 Febbriao 2018 (primo compito)

Sia V uno spazio vettoriale su un campo $\mathbb{K}$ e sia $V^\vee$ lo spazio duale associato a V. Sia $S \subset V$ un sottoinsieme di V; definiamo

$$S^\circ := \{L \in V^\vee \mid L(\underline{v}) = 0 \ \forall \underline{v} \in S\}.$$

$S^\circ \subset V^\vee$ è detto l'*annullatore* di $S \subset V$. Se R è un sottoinsieme di $V^\vee$ definiamo

$$^\circ R := \{\underline{v} \in V \mid L(\underline{v}) = 0 \mid \forall L \in R\}.$$

$^\circ R \subset V$ è detto l'*annullatore* di $R \subset V^\vee$.

Esercizio 1. Consideriamo $R \subset V^\vee$ e sia $R^\circ \subset V^{\vee\vee}$ il suo annullatore nel duale di $V^\vee$ e cioè nel biduale $V^{\vee\vee}$. Utilizzando l'isomorfismo canonico $\beta : V \to V^{\vee\vee}$ mettere in relazione $R^\circ \subset V^{\vee\vee}$ e $^\circ R \subset V$.

Esercizio 2. Verificare che $S \subset T \Rightarrow T^\circ \subset S^\circ$.

Esercizio 3. Verificare che S° e $^\circ R$ sono sottospazi di $V^\vee$ e V rispettivamente. Determinare l'annullatore di V e del sottospazio banale $\{\underline{0}\}$.

Esercizio 4. Verificare che $S^\circ = (\mathrm{Span}(S))^\circ$ dove vi ricordo che $\mathrm{Span}(S)$ è il sottospazio generato da S, e cioè l'insieme delle combinazioni lineari finite di elementi di S. Analogamente per $^\circ R$.

Esercizio 5. Siano W_1, W_2 due sottospazi di V. Verificare che

$$(W_1 + W_2)^\circ = (W_1)^\circ \cap (W_2)^\circ \quad \text{e che} \quad (W_1 \cap W_2)^\circ = (W_1)^\circ + (W_2)^\circ.$$

Esercizio 6. Siano W un sottospazio di V. Verificare che

$$\dim W^\circ = \dim V - \dim W.$$

Suggerimento: fissare una base di W, completarla ad una base di W e considerare la base duale.

Esercizio 7. Leggere il documento *Appunti sulle notazioni del Sernesi* [1] e creare un dizionario fra le notazioni da voi adottate nel corso di Algebra Lineare e le notazioni del libro di Edoardo Sernesi *Geometria 1*.

[1] disponibile nella pagina web del nostro corso