Geometria I. Prof. P. Piazza. a.a. 2017-18.

Settimo ed ultimo compito a casa (7/6/2018).

Esercizio 1. Sia $\mathbf{A}$ un piano affine reale e siano A, B, C tre suoi punti non allineati. Il triangolo di vertici A, B, C è l'insieme dei punti P di $\mathbf{A}$ tali che

$$\overrightarrow{AP} = t\overrightarrow{AB} + u\overrightarrow{AC}$$

per qualche $u, t \in \mathbb{R}$ tali che $u, t \geq 0$ e $u + t \leq 1$.

1. Verificare che un triangolo è un insieme convesso[1].
2. Verificare che il triangolo di vertici A, B, C è l'inviluppo convesso dell'insieme $\{A, B, C\}$ [2].

Esercizio 2. Sia $\mathbb{K}$ un campo e consideriamo il piano proiettivo numerico $P^2(\mathbb{K})$. Vi ricordo la nostra notazione $L(J)$ per il sottospazio generato da un sottoinsieme J. Determinare la proposizione duale della seguente proposizione (teorema di Pappo):
(a). *Siano $P_1, \ldots, P_6$ punti distinti tali che:*
(i) P_1, P_3, P_5 sono allineati; P_2, P_4, P_6 sono allineati e la retta contenente P_1, P_3, P_5 è distinta dalla retta contenente P_2, P_4, P_6;
(ii) nessuno dei P_i appartiene all'intersezione della retta contenente P_1, P_3, P_5 e della retta contenente P_2, P_4, P_6.
Allora i punti

$$L(P_1, P_2) \cap L(P_4, P_5), \quad L(P_2, P_3) \cap L(P_5, P_6), \quad L(P_3, P_4) \cap L(P_6, P_1)$$

sono allineati.

Sia ora $P^3(\mathbb{K})$ lo spazio proiettivo numerico. Determinare le proposizioni duali delle seguenti proposizioni:

(b). *Siano r ed s due rette sghembe e P un punto non contenuto né in r né in s. Allora esiste un' unica retta t che interseca r ed s e che contiene P.*

(c). *In $P^3(\mathbb{K})$ tre punti distinti non allineati generano un piano.*

Esercizio 3. Sia $\mathcal{C}$ la curva di $P^2(\mathbb{C})$ di equazione

$$F(X_0, X_1, X_2) = X_0^3 + 2X_0^2 X_2 + X_0 X_2^2 + X_1^2 X_2 = 0\,.$$

1. Verificare che $\mathcal{C}$ ha un unico punto singolare S e determinarlo.
2. Determinare l'equazione della retta tangente a $\mathcal{C}$ in $[1, 2i, 1]$.
Da **1** segue che il punto singolare $S \in P^2(\mathbb{C}) \setminus H_0 \equiv A^2(\mathbb{C})$.
3. Scrivere l'equazione affine di $\mathcal{C}_A := \mathcal{C} \cap (P^2(\mathbb{C}) \setminus H_0)$.
4. Studiare la natura di S determinando in particolare l'equazione cartesiana delle tangenti principali a $\mathcal{C}$ in S. (Suggerimento: può essere utile una traslazione....)

[1] F è convesso se comunque presi due suoi punti il segmento che li unisce è tutto contenuto in F

[2] l'inviluppo convesso di un insieme è l'intersezione di tutti gli insiemi convessi che contengono quell'insieme

Esercizio 4. Sia $\mathcal{C}$ la curva di $A^2(\mathbb{C})$ di equazione

$$f(X,Y) = X^3 - 5X^2 - Y^2 + 8X - 4.$$

1. Verificare che $\mathcal{C}$ ha un unico punto singolare R e determinarlo.
2. Determinare l'equazione della retta tangente a $\mathcal{C}$ in $(1,0)$.
3. Sia $A^2(\mathbb{C}) = P^2(\mathbb{C}) \setminus H_0$; scrivere l'equazione della chiusura proiettiva di $\mathcal{C}$ in $P^2(\mathbb{C})$.
4. Studiare la natura di R determinando in particolare l'equazione cartesiana delle tangenti principali a $\mathcal{C}$ in S. (Suggerimento: può essere utile una traslazione....)